Die Funktion eines zusätzlichen Prüfbits zur Fehlererkennung

Das Wort eines systematischen (n, k, d_{min})-Codes zur HD- (= Hard Decision) Korrektur von

$$t_{korr} \leq \frac{d_{min}-1}{2}$$

Fehlern hat den Aufbau

$$v=\left(u_1 \;\; u_2 \;\; \dots \;\; u_k \;\; y_1 \;\; y_2 \;\; \dots y_m \right) \;\; .$$

Eine Anzahl t_{korr} -Fehler in beliebiger Verteilung auf die Info- und/oder Prüfbits kann damit vollständig korrigiert werden, wenn die Prüfbits aus den Infobits geeignet bestimmt werden (siehe Hamming-Code). Steigt die Anzahl der tatsächlich auftretenden Fehler aber um einen weiteren auf

$$t=t_{korr}+1 \quad ,$$

so wird durch den Korrektur-Algorithmus im Allgemeinen auf eine falsches Codewort korrigiert, da der Algorithmus so gestaltet ist, dass er höchstens t_{korr} -Fehler richtig behandeln kann. In diesem Fall steigt dann nach der vermeintlichen Korrektur sogar die Anzahl der Restfehler gegenüber dem unkorrigierten Fall. Warum? Weil sich die Codewörter um wenigsten d -Stellen unterscheiden und

$$d_{min} \;\geq\; 2 \cdot t_{korr}+1 \;>\; t_{korr}+1$$

ist. Zum Beispiel würde der (7,4,3)-Hamming-Code bei zwei Fehlern falsch auf ein Wort mit dann wenigsten 3 Fehlern oder mehr korrigieren.

Ergänzt man den Code jedoch um ein weiteres Prüfbit y_{m+1} ,

$$v'=\left[\left(u_1 \;\; u_2 \;\; \dots \;\; u_k \;\; y_1 \;\; y_2 \;\; \dots y_m \right) \;\; y_{m+1}\right] \;=\; \left[v_1 \;\; v_2 \;\; \dots \;\; v_n \;\; v_{n+1}\right] \;\; ,$$

welches die „1“-Bits in v auf gerade Parität ergänzt, so können beim zugeordneten Empfangswort

$$w=\left(w_1 \;\; w_2 \;\; \dots \;\; w_n \;\; w_{n+1}\right)$$

folgende behandelbare Fälle auftreten:

a) kein Fehler aufgetreten

- Alle Prüfgleichungen für den Empfangswortteils $w=\left(w_1 \;\; w_2 \;\; \dots \;\; w_n\right)$ sind erfüllt.
- Die Parität des Bits w_{n+1} stimmt.

b) ein Fehler in der letzten Stelle aufgetreten (v_{n+1} wurde gekippt)

- Alle Prüfgleichungen für den Empfangswortteil $w=\left(w_1 \;\; w_2 \;\; \dots \;\; w_n\right)$ sind erfüllt.
- Die Parität des Bits w_{n+1} stimmt **nicht**.

c) ein Fehler in den Stellen v_1 bis v_n aufgetreten

- Die Prüfgleichungen für den Empfangswortteil $w = (w_1 \;\; w_2 \;\; \ldots \;\; w_n)$ sind **nicht** alle erfüllt.
- Die Parität des Bits w_{n+1} stimmt **nicht**.

d) zwei Fehler sind in irgendeiner beliebigen Anordnung aufgetreten

- Die Prüfgleichungen für den Empfangswortteil $w = (w_1 \;\; w_2 \;\; \ldots \;\; w_n)$ sind **nicht** alle erfüllt.
- Die Parität des Bits w_{n+1} stimmt.

Im Fall d) ist eine Korrektur zwar nicht möglich, da man nicht sehen kann, wo die beiden Fehler entstanden, aber man kann das Empfangswort verwerfen, damit es keinen zusätzlichen Schaden anrichtet, z. B. Korrektur auf einen falschen Maschinencode, was fast immer zum Systemabsturz führt .

Aufgabe: Es wurden Wörter eines (7, 4,3)-Hamming-Codes (siehe Hilfsblatt zu VL2) mit zusätzlichem Prüfbit für 2-Fehler-Erkennung gebildet. Am Empfangsort kamen folgende Wörter an:

$$w^{(1)} = [0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]$$

$$w^{(2)} = [0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]$$

$$w^{(3)} = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]$$

$$w^{(4)} = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]$$

$$w^{(5)} = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1]$$

$$w^{(6)} = [1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$$

Welche Sendewörter gehören dazu? Können alle richtig zugeordnet werden?