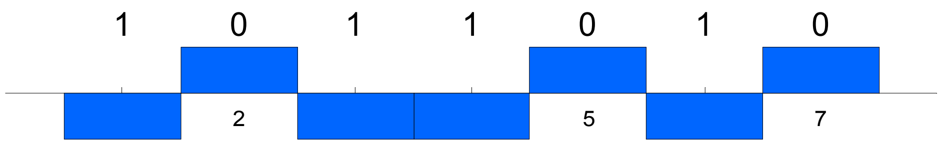
Vergleich der Hard-Decision Decodierung mit der Soft Decision- Decodierungi (HD- mit SD-Decodierung)

Als Beispiel für die folgenden Überlegungen dient der (7,4,3)-Hamming- oder BCH-Code). Wegen des Mindestabstands 3 lässt sich bei Hard-Decision-Demodulation damit ein 1-Bitfehler je Codewort der Länge 7 korrigieren. Der Code besteht aus folgenden 16 Wörtern:

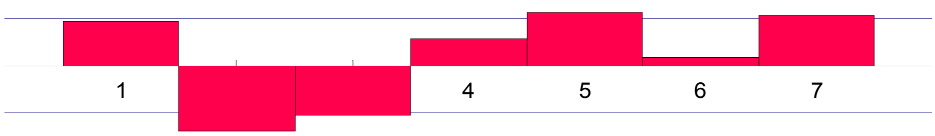
Nr.	u_1 u_2 u_3 u_4	Basis-Wörter	**Codewort v**
0	0 0 0 0		[0 0 0 0 0 0 0]
1	0 0 0 1	*	[0 0 0 1 1 1 1]
2	0 0 1 0	*	[0 0 1 0 0 1 1]
3	0 0 1 1		[0 0 1 1 1 0 0]
4	0 1 0 0	*	[0 1 0 0 1 0 1]
5	0 1 0 1		[0 1 0 1 0 1 0]
6	0 1 1 0		[0 1 1 0 1 1 0]
7	0 1 1 1		[0 1 1 1 0 0 1]
8	1 0 0 0	*	[1 0 0 0 1 1 0]
9	1 0 0 1		[1 0 0 1 0 0 1]
10	1 0 1 0		[1 0 1 0 1 0 1]
11	1 0 1 1		[1 0 1 1 0 1 0]
12	1 1 0 0		[1 1 0 0 0 1 1]
13	1 1 0 1		[1 1 0 1 1 0 0]
14	1 1 1 0		[1 1 1 0 0 0 0]
15	1 1 1 1		[1 1 1 1 1 1 1]

Die Zeitdiagramme für Codewort Nr.11 in der Sendeform vs, ein zufälliges Störsignal rs bei SNR=1 und das Empfangssignal ws = vs + rs sehen dann so aus:

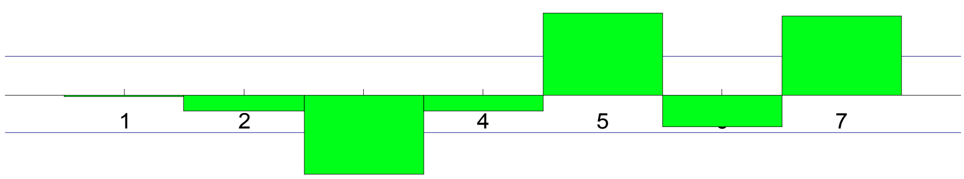
Codewort vs



Störsignal rs

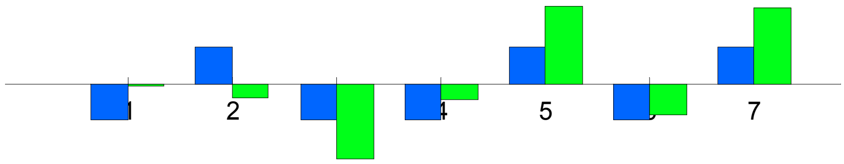


Empfangswort ws



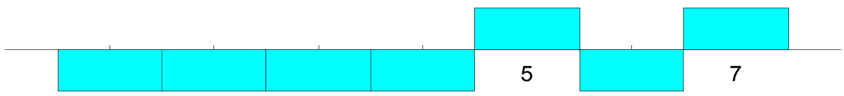
Im direkten Vergleich werden die Unterschiede zwischen vs und ws noch deutlicher, siehe auch Position 2:

Codewort vs (blau) und Empfangswort ws (grün)



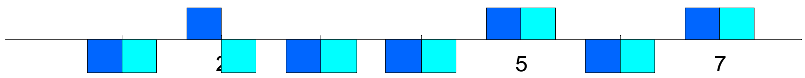
Die Aufgabe der Dekodierung besteht darin, aus dem grünen Empfangssignal das blaue Sendesignal fehlerfrei zu rekonstruieren. Beim HD-Verfahren verwendet man dazu das HD-demodulierte Empfangssignal, ws_{HD} was nur die Vorzeichen der Empfangswerte berücksichtigt :

HD−demoduliertes Wort aus ws



Im Vergleich mit dem Sendewort vs ist eine Fehlstelle an Position 2 zu erkennen:

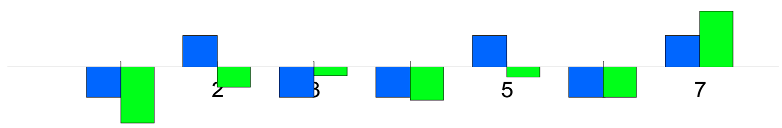
Codewort vs (blau) und HD−demoduliertes Empfangswort ws_{HD} (grün)



Die Auswertung der Paritätsgleichungen des Hammingverfahrens oder des Syndrompolynoms beim BCH-Code ermöglicht die Beseitigung dieser Fehlstelle. Für das ermittelte „Schätzwort“ $\tilde{v}s$ gilt dann $\tilde{v}s = vs$, und die 4 Infobits 1011 liegen fehlerfrei vor.

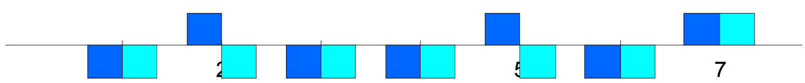
Bei anderen zufälligen Konstellationen der Störsignale rs können allerdings auch mehrere Fehlstellen im HD-demodulierten Empfangssignal ws_{HD} auftreten. Das Korrekturverfahren liefert dann ein falsch ermitteltes „Schätzwort“ $\tilde{v}s \neq vs$, wobei sogar weitere Fehler hinzugefügt werden. Das ist auch der Grund, weshalb bei schlechtem SNR die Restfehlerrate nicht gegen den theoretischen Wert 50% sondern sogar gegen 100% läuft. Ein **Beispiel** für dasselbe Codewort v = 1011010 wie zuvor, aber mit anderen zufälligen Störsignalen rs. Hier sieht der Vergleich von Sende- und Empfangssignal so aus:

Codewort vs (blau) und Empfangswort ws (grün)



Nach HD-Demodulation bleiben die beiden Fehlstellen bei Position 2 und 5 zurück:

Codewort vs (blau) und HD−demoduliertes Empfangswort ws_{HD} (grün)



Ordnet man den HD-demodulierten Empfangssignalen ws_{HD} die logischen Bits zu, so erhält man

$$ws_{HD} = (-1\ \ -1\ \ -1,\ \ -1,\ \ -1,\ \ -1,\ \ +1)\ \rightarrow\ w_{HD} = 1111110\ .$$

Die Korrektur durch Auswertung der Paritätsgleichungen (oder des Syndrompolynoms s(x) beim BCH-Code) ergibt wegen

$$y_{HD1} = w_{HD5} = (w_{HD1} + w_{HD2} + w_{HD4})\ \text{MOD}\ 2\ \rightarrow\ \text{erfüllt}$$

$$y_{HD2} = w_{HD6} = (w_{HD1} + w_{HD3} + w_{HD4})\ \text{MOD}\ 2\ \rightarrow\ \text{erfüllt}$$

$$y_{HD3} = w_{HD7} = (w_{HD2} + w_{HD3} + w_{HD4})\ \text{MOD}\ 2\ \rightarrow\ \text{nicht erfüllt !}\ ,$$

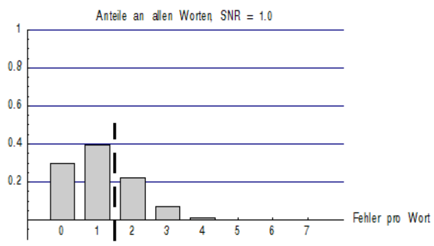
dass das Paritätsbit an der Position 7 scheinbar falsch ist und das Empfangswort wird **falsch** auf das Schätzwort

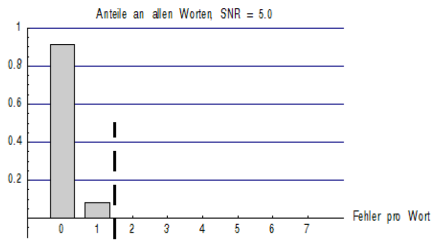
$$\tilde{vs} = (-1\ \ -1\ \ -1,\ \ -1,\ \ -1,\ \ -1,\ \ +1)\ \rightarrow\ \tilde{v} = 1111110\ .$$

korrigiert. Es verbleiben die 4 Infobits 1111, es ist ein falsches Infobit an der zweiten Position enthalten.

Der **Vorteil** des HD-Dekodier-Verfahren ist die verhältnismäßig einfache Bestimmung der Fehlerposition über die Auswertung von Gleichungen. Als Eingabe benötigt man nur die Vorzeichen des Empfangswortes ws. Damit lassen sich über klar definierte Algorithmen (Paritätsgleichungen oder Syndrompolynome) Fehler bis zur maximal vorgegebenen Zahl $t = t_{korr}$, für die der Code ausgelegt ist, sicher korrigieren.

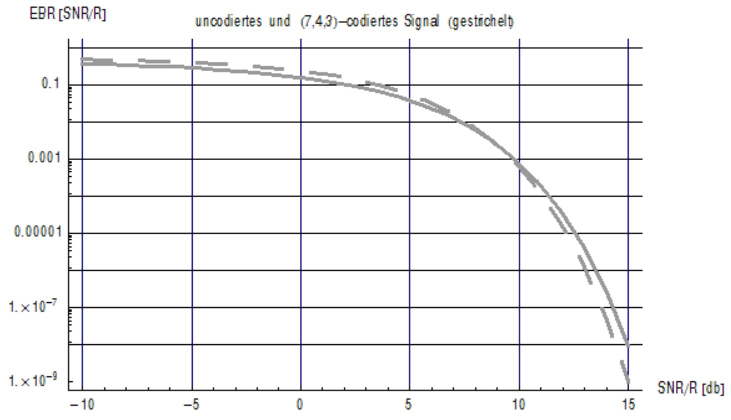
Der **Nachteil** liegt darin, dass wegen der HD-Demodulation (= nur die Vorzeichen des Empfangswortes ws werden verwendet) weitere nützliche Zusatzinformationen aus der Art und Verteilung der Störsignale „brutal“ unterschlagen werden und somit keinen Beitrag zur Leistungsverbesserung leisten können. Daher bieten insbesondere bei kurze Codes nur bescheidene Leistungen, weshalb sie sich selbst bei qualitativ guten Kanälen mit großem SNR kaum für den praktischen Einsatz eignen. Die beiden folgenden Diagramme lassen die Tendenz ahnen (aus Dankmeier, Grundkurs Codierung, Vieweg-Verlag 2006):





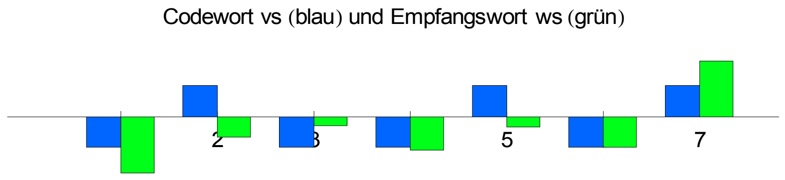
Bei einem Kanal mit SNR=1 enthalten wegen der normalverteilten Störwerte rs etwa 30% der HD-demodulierten Empfangswörter mindestens 2 Fehlstellen, bei SNR=5 sind es immer noch 5%. Eine reale

Verbesserung gegenüber einem nichtcodierten Informationsstrom (durchgezogener Verlauf) ist überhaupt erst ab etwa SNR=9 zu erreichen, wie das Restfehler-Diagramm zeigt:

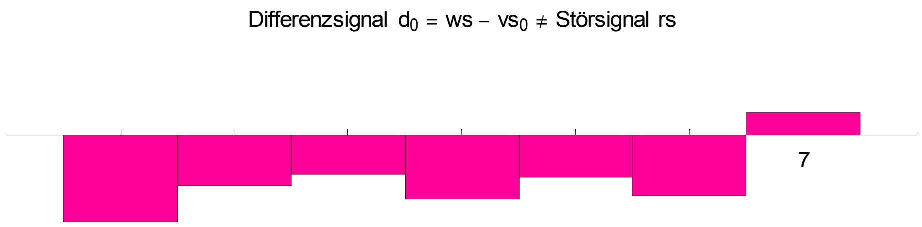


Hinweis: Hier wird als Abszisse das auf die Informationsrate R normierte SNR/R (=Signal-to-Noise-Ratio bezogen auf R) eingesetzt. Die Erklärung findet man im Informationsblatt „Shannon-Gesetz“, die qualitative Aussage wird hierdurch jedoch nicht beeinflusst.

Den Mangel des HD-Verfahrens umgeht die **Soft Decision**-Lösung, in dem sie die statistischen Informationen aus dem Störsignal umfassender nutzt. Dafür ist dieser Weg in seiner reinen Form wegen des exponentiell mit der Zahl der Infobits im Codewort steigenden Aufwandes im Allgemeinen nur unter Verwendung von Näherungen einsetzbar. Am Beispiel des zuvor betrachteten Empfangswortes ws, welches bei HD_Demodulation zwei Fehlstellen an den Positionen 2 und 5 aufwies,

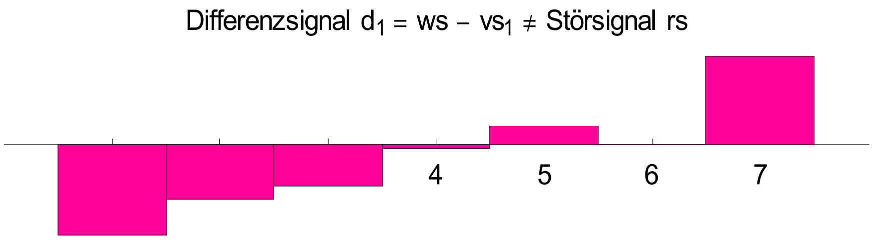


lässt sich das Prinzip klar machen. Man vergleicht systematisch alle möglichen Codewörter vs mit ws, in dem man die Differenz d_k = ws-vs_k bildet und bestimmt die Summe der Differenzquadrate. Durch das Quadrieren erhält man nur positive Werte. Dasjenige Codewort mit der kleinsten Summe passt am besten zum Empfangswort und wird als **wahrscheinlichstes Codewort** übernommen. Beginnt man mit dem Codewort Nr. 0, v_0 = 000000, so zeigt das folgende Diagramm das Differenzsignal d_0:



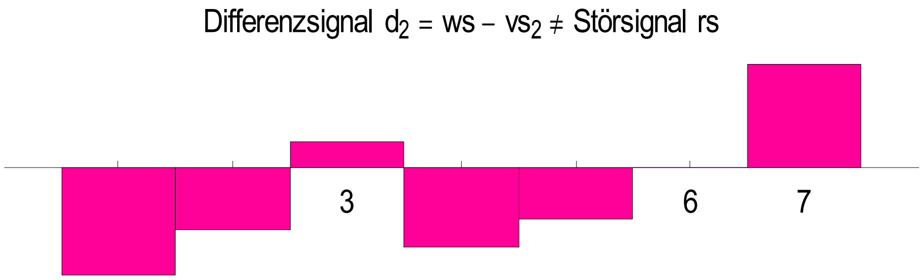
Die Summer der Quadrate beträgt **qd_0 = 23.4.**

Codewort Nr. 1 liefert mit v_1 = 0001111 das Diagramm für das Differenzsignal d_1:



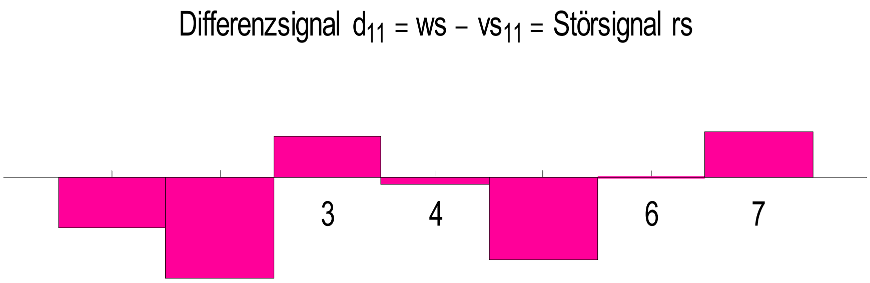
Die Summe der Quadrate **qd_1 = 20.7** ist hier zwar geringer, aber bevor man nicht alle 16 Codewörter durchprobiert hat, kann man keine abschließende Aussage treffen.

Mit Codewort Nr.2, v_2 = 0010011 erhält man dieses Diagramm:



Die Summe der Quadrate beträgt **qd_2 = 25.3,** usw.

Beim Codewort Nr. 11 (dem „Richtigen"), v_{11} = 1011010, stellt das Diagramm natürlich die Störsignale rs dar, was man jedoch als Empfänger nicht weiß:



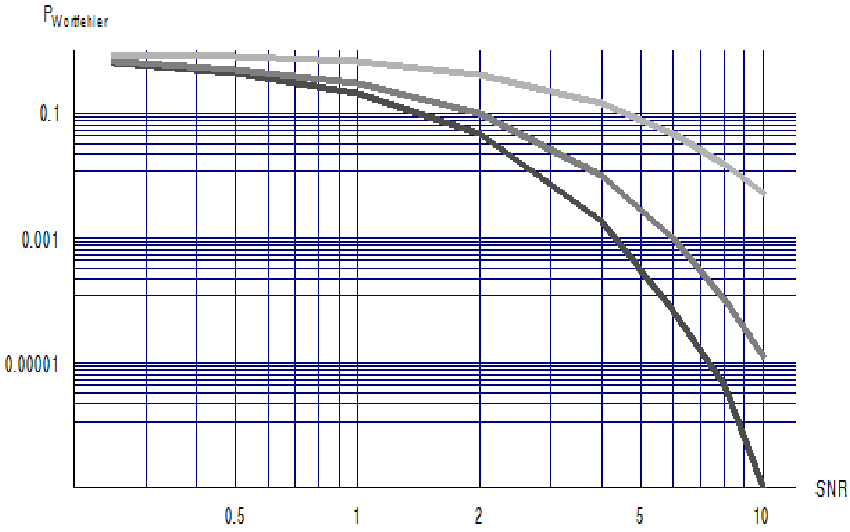
Hier hat die Summe der Quadrate den Wert **qd_{11} = 6.5** und entspricht dem Wert qrs der Summe der Quadrate der Störsignale. Auch im Vergleich mit denen der restlichen Codewörtern bleibt **qd_{11}** am kleinsten und somit wird Codewort v_{11} der Kandidat der Wahl.

Bemerkenswert bei diesem Verfahren ist, dass **keine Korrektur** sondern eine **Auswahl** durch Vergleich durchgeführt wird! Man weiß ja gar nicht, was eigentlich zu korrigieren ist.

Die dadurch erzielte Leistungsverbesserung ist beträchtlich. Es werden mit absteigender Tendenz viele Wörter richtig ausgewählt, die beim HD-Verfahren mehr als t_{korr} Fehlstellen ergäben und damit prinzipiell nicht korrigierbar sind. Beim hier betrachteten (7,4,3)-Code ordnet der SD-Weg den Empfangswörtern also viele richtige Codewörter zu, die bei der HD-Lösung mit 2, 3 , 4, 5, ... Fehlstellen in jedem Fall zu falschen Korrekturen führen würden.

Allerdings gibt es auch Konstellationen der Störsignale rs, bei denen die richtige Zuordnung nicht gelingt. Eine genauere Begründung hierzu und wie man den Anteil berechnet findet sich zum Beispiel im Bereich

„Downloads“ von www.vkfco.de , Aufsatz „SD zu HD Teil1“. Hier wird auch eine Abschätzung für die Leistungsverbesserung gegeben *). Einen Eindruck vermittelt das folgende Diagramm der Restfehler-Verläufe:



Der schwarze Verlauf stellt den SD-Verlauf dar, dunkelgrau sind die HD-Ergebnisse aufgetragen, die hellgraue Kurve zeigt den Fall ohne Korrektur. Da HD- und SD-Ergebnisse dieselbe Info-Rate R = 0.57 aufweisen, sind sie direkt vergleichbar (nicht jedoch mit der hellgrauen Kurve der Gaußschen Fehlerfunktion, da hier noch keine Bandbreiten-Anpassung berücksichtigt wurde. Bei geeigneter Normierung mit R liegen die schwarze und die dunkelgraue Kurve weiter rechts, die dunkelgraue Kurve schneidet die Gaußsche Fehlerkurve dann etwa bei SNR=9, siehe auch Diagramm auf Seite 4).

Bei SNR=10 liegen die Restfehler bei SD etwa um den Faktor 1/100 gegenüber HD niedriger – eine deutliche Verbesserung.

***) Hinweis:** Das Differenzsignal

$d_{11} = ws - vs_{11} = (vs_{11} + rs) - vs_{11} = rs$ ergibt als Summe der Differenzquadrate den Ausdruck

$$qd_{11} = rs_1^2 + rs_2^2 + \ \dots \ + rs_7^2 \ .$$

Das Vergleichscodewort v_{14} =1110000 zum Beispiel unterscheidet sich von v_{11} = 1011010 aber an den Positionen 2, 4 und 6. Daher wird die Summe hier

$$qd_{14} = rs_1^2 + rs_2^2 + \ \dots \ + rs_7^2 + 3\cdot(-rs_2 - rs_4 - rs_6) \ = \ qd_{11} + 3\cdot(-rs_2 - rs_4 - rs_6) \ .$$

Solange die Summe in der runden Klammer größer als 0 ist, hat qd_{14} einen größeren Wert als qd_{11}, so dass die Zuordnung richtig bleibt. Wegen der statistische Verteilung der Störgrößen kann allerdings auch der Fall eintreten, dass der Wert in der runden Klammer negativ wird. Dann erhält man eine falsche Zuordnung.

Während bei HD das reine Vorzeichen der einzelnen Empfangswort-Signale unabhängig von den anderen über die Fehlstellen entscheidet, geht bei SD die Summe mehrere Störsignale ein, so dass sich im Allgemeinen große und kleine Werte teilweise aufheben. SD ist damit weniger empfindlich gegen große Störsignale.