Zum Kanalkapazitäts-Theorem von Shannon

Claude Elwood **Shannon** hat folgenden einfachen Zusammenhang gezeigt:

$$C = B \cdot \log_2(1 + SNR) \quad .$$

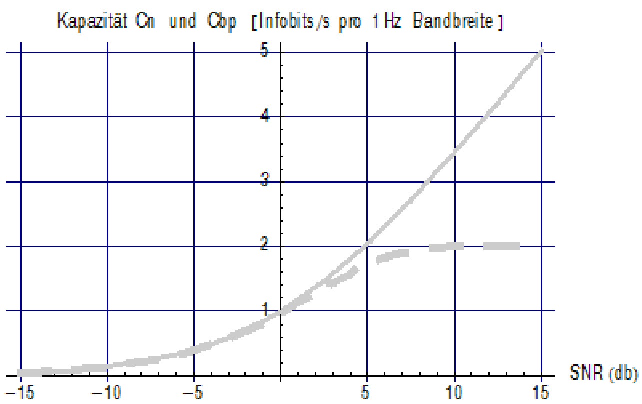
Dabei ist

- C die nach Korrektur mithilfe der besten Codes (was auch immer diese sind) fehlerfrei auf einem Kanal mit der Bandbreite B übertragbaren Info-Bits pro Sekunde = Kanalkapazität
- B die Bandbreite des Kanals in Hz
- SNR das Signal-Stör-Verhältnis des Kanals.

Das Theorem gilt in dieser Fassung nur für Kanäle

- auf denen kontinuierliche, normalverteilte Info-Signale
- unter dem Einfluss normalverteilter Stör-Signale

übertragen werden. Da es sich für nicht-normalverteilte Info-Signale, wie z. B. für die in der Technik meistens verwendeten diskreten bipolaren Info-Signale, diesem mit schlechter werdenden Signal-Stör-Verhältnissen SNR < 1.5 (→ SNR[dB] < 1.8) aber asymptotisch nähert, ist es als Referenz sehr geeignet, wie das folgende Diagramm für die Kanalkapazitäten normal- und bipolar gleichverteilter Info-Signale zeigt:



Für die Achsenbezeichnungen gilt:

- Cn → Kanalkapazität bei normalverteilten Info-Signalen (durchgezogene Linie)
- Cbp → Kanalkapazität bei bipolar-gleichverteilten Info-Signalen (gestrichelte Linie)
- $SNR[dB] = 10 \cdot \log_{10}(SNR)$
- $SNR = 10^{\left(\frac{SNR[dB]}{10}\right)}$

Genaueres erfährt man im Originalaufsatz

C. E. Shannon: „A Mathematical Theory of Communications“, Bell Systems Technical Journal, Vol. 27, Seiten 379 – 423 und 623 – 656 (1948). Einige Bemerkungen hierzu gibt es auch bei W. Dankmeier, „Grundkurs Codierung“, Vieweg 2006.

Weist der Kanal z. B. die Bandbreite B = 100 Mega-Hertz= 10^8 Hz auf, was den heute üblichen Bandbreiten bei WLANs entspricht, so können bei SNR = 1 (→ SNR[dB] = 0) und bipolaren Sendesignalen etwa

$$C = 10^8 \cdot \log_2(1+1) = 10^8 \cdot 1 = 10^8 \left[\frac{\text{Info-Bit}}{\text{s}}\right]$$

fehlerfrei übertragen werden.

Bei SNR > 10 wären es knapp $2 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{Info-Bits}}{\text{s}}\right]$.

Diese Aussage stellt allerdings nur die Möglichkeit dafür in Aussicht und gibt keine Hinweise auf geeignete Codes. Diese müssen recht mühsam gefunden werden, wobei man aber schon weit fortgeschritten ist.

Für einen Kanal mit SNR = 1 oder SNR[dB] =0 kann man von den nach dem Abtasttheorem übertragbaren

$$2 \cdot B = 2 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{Codewort}-\text{Bits}}{\text{s}}\right]$$

also die Hälfte an Info-Bits fehlerfrei übertragen. Dafür benötigt man einen Code mit der Info-Rate R = 0.5, der dann gleich viele Info- wie Prüf-Bits enthält. Damit ist allerdings noch nichts über den Aufbau des Codes selbst gesagt, es wird lediglich festgestellt, dass es einen solchen Code überhaupt geben kann!

Bei SNR = 0.1 (→ SNR[dB] = -10) ist

$$C = 0.14 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{Info}-\text{Bits}}{\text{s}}\right] .$$

Hier wird ein Code mit R = 0.14 erforderlich, der mit 86% Prüfbits ausgestattet ist. Will man wieder

$$C = 10^8 \left[\frac{\text{Info-Bit}}{\text{s}}\right]$$

erreichen, so muss die Bandbreite entsprechend erhöht werden. Da hierbei aber zugleich die Kanalqualität sinkt, läuft das auf einen Iterationsprozess hinaus, der schließlich zur **Shannon-Grenze** führt. Dies ist dann eine theoretische Betrachtung mit begrenztem Wert für praktische Aufgabenstellungen, da die Bandbreitenerhöhung eines Kanals mit erheblichen Kosten verbunden sein wird. Im Brennpunkt werden daher hochratige Codes mit 0.8 < R < 1 bleiben.

Aufgabe: Welche Info-Raten R weisen die FEC-Codecs (FEC = Forward Error Correction) z. B. des Unternehmens **Advanced Hardware Architecture** auf ? (HP: www.aha.com).