

Mathematik I und II

Überarbeitungsstand 10.02.2013 (ab Kapitel 18.2)

unter anderem Korrektur bei der Bestimmung von y_p auf Seite 103

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlenmengen	4
2 Zahlendarstellungen	5
2.1 Umwandlung von Zahlendarstellungen.....	6
2.2 Rechenoperationen auf Daten im Binärsystem.....	7
3 Auffrischung zu elementaren Operationen und Verfahren	11
3.1 Lösen quadratischer Gleichungen (pq-Formel, Mitternachtsformel).....	11
3.2 Behandeln von Betragsausdrücken.....	11
3.3 Behandeln von Ungleichungen.....	11
3.4 Kleinstes gemeinsames Vielfache (= kgV) zweier ganzer Zahlen	11
3.5 Addition und Subtraktion von rationalen Ausdrücken (Brüchen).....	12
3.6 Multiplikation und Division von rationalen Ausdrücken (Brüchen).....	12
3.7 Potenzrechnung.....	12
3.8 Kompaktschreibweise für Summen und Produkte.....	13
3.9 Polynome, Zusammenhang zwischen Nullstellen und Koeffizienten:	13
3.10 Fakultät.....	14
3.11 Alternierende (wechselnde) Vorzeichen.....	15
3.12 Darstellung gerader und ungerader natürlicher Zahlen	15
3.13 Binomialkoeffizienten.....	15
3.14 Binomische Ausdrücke.....	15
3.15 Polynomdivision.....	15
3.16 Stetigkeit.....	16
3.17 Nullstellen, Polstellen, Asymptoten.....	17
3.18 Rationale Polynomfunktionen.....	18
3.19 Exponential-Funktionen.....	18
3.20 Logarithmus-Funktionen.....	18
4 Folgen und Reihen	19
4.1 Folgen	19
4.2 Folgen und rekursive Gleichungen.....	19
4.3 Reihen.....	20
5 MATLAB (oder Scilab) als „Super-Taschenrechner“	21
6 Trigonometrische Funktionen I	22
7 Vektoren und Koordinatensysteme	22
7.1 Rechenoperationen mit Vektoren.....	24
7.2 Vektor-Matrix-Multiplikation zur Lösung linearer Gleichungssysteme.....	25
7.3 Der Gauß'sche Algorithmus als Erweiterung des Additionsverfahrens.....	30
7.4 Spaltenvektorform und Zeilenvektorform	31
7.5 Invertieren einer quadratischen Matrix mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.....	32
7.6 Sonderfall: Inverse von orthogonalen Matrizen (= Drehmatrizen).....	33

7.7 Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen (LGS).....	33
7.8 Eigenwerte und Eigenvektoren.....	35
8 Einige weitere Funktionen und deren Umkehrfunktionen, Beispiel arcsin(x) und arcos(x)	37
8.1 Tigonometrische Funktionen II und Diagramme.....	38
8.1.1 Weitere trigon. Funktionen und Umkehrfunktionen arctan(x) und arccotan(x).....	38
8.1.2 Umrechnung der Winkel von α (Grad) in x (Bogenmaß).....	38
8.1.3 Einige trigonometrische Umformungen.....	39
8.1.4 Oft gebrauchte Werte.....	39
8.2 Polynomiale Funktionen.....	39
8.3 Exponentialfunktionen.....	40
8.4 Gauß'sche Normalverteilung.....	40
8.5 Polynomfunktionen.....	41
8.6 Gebrochene Funktionen.....	43
8.7 Kombinatorische Funktionen (Komplexionen).....	45
8.8 Betragsfunktionen.....	47
8.9 Modulo-Funktion und endliche Zahlkörper.....	49
9 Differenzieren (= Ableiten) von Funktionen).....	51
9.1 Ein paar Grundlagen.....	51
9.2 Regeln zum Differenzieren zusammengesetzter Funktionen.....	53
9.3 Anwendungen des Differenzierens.....	54
9.3.1 Bestimmung von Extremwerten.....	54
9.3.2 Beseitigung von Unbestimmtheitsstellen (l'Hospital-Regel).....	55
9.3.3 Reihenentwicklungen (Potenzreihen, Taylor-Reihen).....	56
10 Komplexe Zahlen	58
10.1 Grundlagen.....	58
10.2 Die komplexe Zahlenebene.....	58
10.3 Rechenoperationen.....	60
11 Integrieren.....	62
11.1 Grundlagen.....	62
11.2 Einige Rechenregeln für das Integrieren.....	64
11.3 Partialbruchzerlegung.....	65
11.4 Anwendungen des Integrierens	66
11.4.1 Berechnung von Massen-Schwerpunkten.....	66
11.4.2 Berechnung von Trägheitsmomenten für drehende Massen	67
11.4.3 Flächen-Trägheitsmomente zur Berechnung der Balkenbiegung.....	67
11.4.4 Dreifachintegrale zur Volumenberechnung.....	70
11.4.5 Integrale zur Feldberechnung in der Elektrotechnik.....	70
12 Mittelwerte	70
12.1 Arithmetische und quadratische Mittelwerte, Effektivwert.....	70
12.2 Mittelwerte zufälliger Ereignisse.....	71
12.3 Mittelwerte diskreter Zahlenmengen.....	73
12.4 Die Autokorrelationsfunktion als Mittelwertfunktion.....	74
12.5 Die Kreuzkorrelationsfunktion als Mittelwertfunktion.....	76

12.6	Fourier-Reihen als Spezialfall einer Kreuzkorrelationsfunktion.....	78
12.7	Diskrete Fourier-Transformation (DFT und FFT)	82
12.8	Mittelwertbildung zur Fehler-Verringerung mithilfe der Regression.....	84
13	Numerische Fehler bei der Lösung von Gleichungssystem.....	87
13.1	Beispiel: Berechnung der Eigenwerte eines Systems 2. Ordnung.....	87
14	Eigenwerte und Eigenvektoren II.....	90
14.1	Technische Bedeutung von Eigenwerten.....	91
15	Totales Differenzial und partielle Ableitungen.....	93
16	Linearisierung um Arbeitspunkte nichtlinearer Gleichungen	95
17	Lineare Differenzialgleichungen.....	99
17.1	Lösungsansatz für gewöhnliche lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten und Anfangsbedingungen für $x = 0$	100
17.2	Gewöhnliche lineare DGLs 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.....	101
17.3	Gewöhnliche lineare DGLs 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.....	102
17.4	Gewöhnliche lineare DGLs n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.....	103
17.5	Gewöhnliche lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und nicht konstanter rechter Seite.....	103
17.6	Stationäre DGL-Lösungen mit Hilfe komplexer Zeigergrößen.....	104
17.7	Numerisches Lösen von (fast) beliebigen gewöhnlichen DGLs.....	105
17.7.1	Beispiele für das numerische Lösen von DGLs erster Ordnung.....	106
17.7.2	Beispiele für das numerische Lösen von DGLs höherer Ordnung.....	108
18	Skalar- und Vektorfelder.....	111
18.1	Skalarfelder.....	111
18.2	Gradientenfelder, Vektorfelder.....	112
18.3	Divergenz.....	112
18.4	Rotation.....	112
18.5	Nabla- und Laplace-Operatoren.....	113
18.6	Partielle Differenzialgleichungen.....	113
18.7	Zylinderkoordinaten.....	113
18.8	Kugelkoordinaten.....	114
18.9	Beschreibung von Feldfunktionen in Zylinder- oder Kugelkoordinaten.....	114
18.10	Die Maxwellschen Gleichungen als Beispiel für Feldfunktionen.....	114
19	Anmerkungen zur Informationstechnik.....	115
20	Literatur.....	117

Hinweis: Die Anordnung der hier genannten Begriffe folgt der Absicht, den Gebrauch der in den Veranstaltungen zur Elektrotechnik und Technischen Mechanik verwendeten Berechnungsverfahren aktuell zu unterstützen. Die Systematik orientiert sich daher eher hieran, als an rein fachliche Gliederungen. Über ein Semester hinweg soll dabei dennoch die fachliche Systematik erkennbar bleiben.

1 Zahlenmengen

Mathematik ist die Wissenschaft von den Zahlen, von Zahlenobjekten, von zählbaren und nicht zählbaren Objekten, von deren Zusammenhängen, Strukturen und Veränderbarkeiten. Die in den Ingenieurwissenschaften verwendeten Zahlen lassen sich bezüglich ihrer Typen in Zahlenmengen zusammenfassen. Hier folgen einige wenige Begriffe aus der - allerdings sehr viel umfassenderen - Mengenlehre.

Für Mengen gilt allgemein nach *Cantor* folgende Definition (siehe auch dtv-Atlas zur Mathematik):

Def.: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge.

Einige Zahlenmengen:

Name	Abkürzung	Menge	Operationen
Natürliche Zahlen	N	$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$	+ x
Ganze Zahlen	Z	$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	+ - x
Rationale Zahlen	Q	$Q = \{\dots -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \dots\}$ (alle Brüche)	+ - x /
Reelle Zahlen	R	$R = Q \cup \{\dots -\sqrt{2}, e, \pi, \sqrt{13}, \dots\}$ (alle rationalen und irrationalen Zahlen)	+ - x /
Komplexe Zahlen	C	$C = \{z := x + iy, x \in R, y \in R, i = \sqrt{-1}\}$ i ist die imaginäre Einheit	+ - x /
Endliche Ganzzahlmengen MOD p	Z_p	$Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ Wesentliches Hilfsmittel der modernen Kryptografie und der Fehlerkorrekturverfahren in der Datenübertragung	+ - x /

Bei den reellen Zahlen sind die irrationalen Zahlen

- algebraische Zahlen, d. h. solche, die sich als reelle Lösungen von Polynomgleichungen mit reellen Koeffizienten ergeben, z. B. $y = x^2 \rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.
- transzendente Zahlen, die sich nicht als reelle Lösungen von Polynomgleichungen ergeben, z. B. die Kreiszahl π , die Eulerzahl e , $\sin(1)$, $\log_{10}(3)$.

Die angegebenen Operationen zwischen den Elementen der jeweiligen Zahlenmengen sind so definiert, dass sie immer ein Element der Menge ergeben. Daher können natürliche Zahlen z. B. nur addiert und multipliziert, reelle Zahlen, komplexe Zahlen und Elemente endlicher Ganzzahlmengen MOD p (= modulo p) jedoch addiert, multipliziert, subtrahiert und dividiert werden. Letzteres ist eine Eigenschaft mathematischer Körper. In Körpern K gelten außerdem

folgende Gesetze:

- Ist a ein Element von K , $a \in K$, dann ist
 - das Element 0 das neutrale Element bezüglich der Addition ($a+0=a$)
 - das Element 1 das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ($a \cdot 1=a$)
 - das Element $a^{-1}=a_{\text{inv}}=\frac{1}{a}$ das inverse Element bezüglich der Multiplikation
 $a_{\text{inv}} \cdot a=1$.
- Für alle Elemente a, b, c der Menge gilt
 - das Kommutativgesetz: $a+b=b+a$ und $a \cdot b=b \cdot a$
 - das Assoziativgesetz: $a+(b+c)=(a+b)+c$ und $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$
 - das Links-Distributivgesetz: $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$
 - das Rechts-Distributivgesetz: $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$

Bei den endlichen Ganzzahlmengen MOD p ist die Division zunächst nicht offensichtlich. Für Z_5 gilt z. B.

$$2 \cdot 3 \text{ MOD } 5 = 6 \text{ MOD } 5 = 1$$

Eine Zahl mit ihrem Kehrwert (= inverses Element) multipliziert ergibt 1. Also ist 3 in der Menge Z_5 das inverse Element zu 2, abgekürzt

$$3^{-1}=2 \text{ in } Z_5 \text{ oder } 3_{\text{inv}}=2 \text{ in } Z_5$$

Hier schreibt man zur Vermeidung von Missverständnissen für das inverse Element **nicht** $\frac{1}{3}$

Zu jedem Element außer der 0 gibt es im Z_5 (allgemein im Z_p) ein Inverses. Mit

$$1^{-1}=1 \text{ in } Z_5 \text{ und } 4^{-1}=4 \text{ in } Z_5$$

ist die Menge komplett.

Während Addition, Subtraktion und Multiplikation im Z_p sich selbst erklären, hilft bei der Division ein kleiner Trick: Man führt sie auf die Multiplikation mit dem zugehörigen inversen Element zurück, also z. B.

$$(4/3) \text{ MOD } Z_5 = (4 \cdot 3^{-1}) \text{ MOD } 5 = (4 \cdot 2) \text{ MOD } 5 = 3$$

Die Bestimmung solcher modularer inverser Elemente x_{inv} mit $(x_{\text{inv}} \cdot x) \text{ MOD } a = 1$

- MOD a mit $a=p$: Primzahl
- MOD a mit a : beliebige Ganzzahl, aber $\text{ggT}(x, a) = 1$ *)

kann nach den im **Hilfsblatt EA** dargestellten Rechenvorschriften (= Algorithmen) erfolgen, siehe unter www.vkfc.de. Dabei gilt

- $\text{ggT}(x, a) \rightarrow$ größter gemeinsamer Teiler von x und a
- Beispiele: $\text{ggT}(9, 12)=3$, $\text{ggT}(9, 13)=1$.

2 Zahlendarstellungen

Natürliche und ganze Zahlen können in der

- Additionsform (eine Einheit = 1 Strich, z. B. „Bierdeckel-Notation“, römische Zahlen)
- **polyadischen**, Stellwert- oder Positions-Form (z. B. Dezimalzahlen, Binärzahlen)

dargestellt werden. Die Additionsform eignet sich gut zum Addieren und Subtrahieren, nicht jedoch für andere Operationen. Im Weiteren wird daher nur die Positions-Form verwendet.

Im Alltag sind Zahlen in der polyadischen Form als Dezimalzahlen üblich. Die Ziffern bilden dabei

die Koeffizienten eines Polynoms zur Basis $b=10$. So gilt mit den 10 Ziffern von 0, 1, ..., 9

$$131 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 100 + 30 + 1$$

Die Bezeichnung „Stellenwertsystem“ oder „polyadisches System“ verweist darauf, dass nicht nur der Wert der Ziffern, sondern auch deren Position innerhalb der Anordnung Bedeutung hat.

Die Zahlendarstellung ist im Gegensatz zu den Zahlenmengen willkürlich, man kann jeden beliebigen Wert b der natürlichen Zahlen mit $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ als Basis verwenden. So lässt sich 131 als Zahl im Zehnersystem auch

- im Dualsystem (=Binärsystem) als $131_{10} = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 128 + 2 + 1 = 10000011_2$,
- im Oktalsystem als $131_{10} = 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^0 = 128 + 3 = 203_8$,
- im Hexadezimalsystem als $131_{10} = 8 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 128 + 3 = 83_{16}$

oder in beliebigen anderen darstellen. Die 3 letztgenannten erweisen sich in der Angewandten Informatik als nützlich.

Hinweis: Ist die Basis $b > 10$, so reichen die 10 numerischen Ziffern 0, 1, ..., 9 des Dezimalsystems nicht zur Kennzeichnung jeder Stelle aus. Man nimmt dann die 26 Buchstaben des lateinischen Alphabets hinzu. In MATLAB kann man damit z. B. Zahlen bis zur Basis $10 + 26 = 36$ angeben (was aber so gut wie nie gebraucht wird).

2.1 Umwandlung von Zahlendarstellungen

Zur Umwandlung von Ganzzahl- und Festkommazahlen aus der Dezimaldarstellung in Darstellungen zu anderen Zahlenbasen gibt es einfache Verfahren.

a) Umwandlung von Ganzzahlen n_{10} in n_B , $B=2, 3, 4, \dots$:

$$n_{10} : B = \text{Ganzzahlergebnis}_{(1)} + \text{Rest}_{(1)}$$

$$\text{Ganzzahlergebnis}_{(1)} : B = \text{Ganzzahlergebnis}_{(2)} + \text{Rest}_{(2)}$$

.....

Ende, wenn $\text{Ganzzahlergebnis}_{(k)} = 0$. Der $\text{Rest}_{(k)}$ ist immer ungleich 0.

Die Ziffernfolge der Zahl $n_B = \text{Rest}_{(k)}, \text{Rest}_{(k-1)}, \dots, \text{Rest}_{(1)}$ ist das gesuchte n_B .

Beispiel: $n_{10} = 23_{10}$, $B = 2_{10}$

$$\begin{array}{r} 23:2 = 11 + 1 \\ 11:2 = 5 + 1 \\ 5:2 = 2 + 1 \\ 2:2 = 1 + 0 \\ 1:2 = 0 + 1 \\ n_2 = 10111_2 \end{array}$$



b) Umwandlung von Festkommazahlen $(p.q)_{10}$ in $(p.q)_B$, $B=2, 3, 4, \dots$

Der Ganzzahl-Anteil p wird gemäß a) umgewandelt.

Der Nachkomma-Anteil $q = q_{(1)}$ ist kleiner als 1. Er wird mit B multipliziert:

$$x_{(1)} = q_{(1)} \cdot B = \text{VK}_{(1)} \cdot \text{NK}_{(1)}$$

Das Ergebnis besteht aus Vor- und Nachkomma-Anteil. Der Vorkomma-Anteil $\text{VK}_{(1)}$ ist die erste Nachkomma-Ziffer der Zahl $(p.q)_B$.

$$x_{(2)} = \text{NK}_{(1)} \cdot B = \text{VK}_{(2)} \cdot \text{NK}_{(2)}, \quad \text{VK}_{(2)} \text{ ist die zweite Nachkomma-Ziffer usw.}$$

Wenn $NK(k) = 0$ wurde, ist das Ende erreicht.

Beispiel: $(p.q)_{10} = 5.375$, $B=2$

Der Vorkomma-Anteil ergibt $5_{10} = 101_2$

Nachkomma-Anteil :

$$\begin{array}{llll} x_{(1)} = q_{(1)} \cdot 2 = 0.375 \cdot 2 = 0.750 & \rightarrow & VK_{(1)} = 0 & \\ x_{(2)} = q_{(2)} \cdot 2 = 0.750 \cdot 2 = 1.500 & \rightarrow & VK_{(2)} = 1 & \\ x_{(3)} = q_{(3)} \cdot 2 = 0.5 \cdot 2 = 1.0 & \rightarrow & VK_{(3)} = 1 & \downarrow, \text{ da } NK_{(3)} = 0 \rightarrow \text{Ende} \end{array}$$

Ergebnis:

$$5.375_{10} = 101.011_2$$


In diesem Beispiel erhält man eine Binärzahl mit endlich vielen Nachkommastellen. Diese kann in einem mit zweiwertiger Logik arbeitenden Rechner (das sind praktisch alle) exakt dargestellt werden. Der Grund liegt darin, dass der Nachkommaanteil eine endliche Summe aus reziproken Zweierpotenzen bildet. Das ist allerdings ein Sonderfall. Für den Dezimalbruch 0.2 z. B. gilt das nicht. Er lässt sich daher nicht exakt abbilden und ist einer der drei Gründe für die prinzipielle Ungenauigkeiten von Digitalrechnern (die anderen beiden sind die endliche Stellenzahl und die Beschränkung auf rationale Zahlen). Man erkennt das, wenn man etwa

$$(0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1$$

berechnet. Das exakte Ergebnis ist 0, man erhält aber einen kleinen, von 0 verschiedenen Wert. Eventuell wird zwar auf dem Display die 0 ausgegeben, das liegt dann an einer internen Rundung, die sich durch ein anderes Ausgabeformat „überlisten“ lässt.

Eine Ausnahme bieten in begrenztem Umfang bieten Programme für symbolische Rechnungen.

Hinweis: Ist die Basis $B > 10$, müssen entsprechend weitere Ziffernsymbole eingeführt werden, z. B. bei $B=16$ für das Hexadezimal-System bei $10_{10} \rightarrow A_{16}$, $11_{10} \rightarrow B_{16}$ usw.

- c) Die Umwandlung vom Binär- in das Hexadezimal-System ist deshalb besonders einfach, weil je 4 Bits einer Hex-Ziffer entsprechen, z. B. $1011_2 \rightarrow B_{16}$. Für die Umwandlung vom Zehner- in das Hexadezimal-System hilft es daher, die Dezimalzahl zunächst in die Binärdarstellung zu wandeln.

2.2 Rechenoperationen auf Daten im Binärsystem

Um Informationen in gewünschter Form darstellen, verarbeiten und verändern zu können, kann man verschiedene Operationen auf sie anwenden. Da die Einheit von Informationen das zweiwertige Bit ist, liegt es nahe, Informationen im Binärsystem oder besser als 0/1-Folgen zu betrachten. Zwingend ist es jedoch nicht, da man alle Informationen in beliebigen Zahlensystemen darstellen kann, z. B. im Dreier-, Vierersystem usw. Dies ist aber nicht zweckmäßig, solange alle Rechner mit zweiwertigen Logikbausteinen arbeiten, oder anders: Die nur zwei Zustände verarbeiten können.

Es gibt zwei Klassen, die **arithmetischen** Operationen, welche die vom Dezimalsystem bekannten Rechenoperationen auf binäre Darstellungen übertragen, und die **logischen** Operationen, welche teilweise zu weniger bekannten Ergebnissen führen. Für die Beispiele werden folgende Byte-Operanden verwendet:

$$61_{10} = 0011 \ 1101$$

$$37_{10} = 0010 \ 0101$$

- **Arithmetische Operationen** (stellenweise durchzuführen mit Übertrag = **Carry-Bit**)

- Addition

$$\begin{array}{r} 0011\ 1101 \\ +0010\ 0101 \\ \hline 0110\ 0010 \end{array}$$

- **Subtraktion:** Diese kann wie die Addition unter stellenweisem „Borgen“ eines Carry-Bits wie im Dezimalsystem durchgeführt werden. Aus technischen Gründen führt man sie aber lieber auf die Addition einer negativen Zahl (= **Zweierkomplement**) zurück, da man dann als interne Ausführung eines Rechenwerks nur die Addition benötigt.

Das Zweierkomplement einer Zahl ist ihre Negation (= Umkehrung der 0- und 1-Bits) mit anschließender Addition einer 1 (Das Einerkomplement besteht nur aus der Negation).

Es gelten die Bezeichnungen: Differenz = Minuend – Subtrahend.

Fall a: Minuend und Subtrahend sind positive Zahlen, Minuend > Subtrahend

$$61_{10} - 37_{10} = 24_{10}$$

Zweierkomplement der Zahl $37_{10} = 0010\ 0101$:

$$\begin{array}{r} 1101\ 1010 \\ +0000\ 0001 \\ \hline 1101\ 1011 \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird nun zu 61_{10} addiert, der sich in diesem Fall immer ergebende Übertrag 1 in der höchsten Stelle (hier die zu 2^8) bleibt unberücksichtigt. Er ist für den automatischen Verfahrensablauf im Rechner das Zeichen, dass es sich beim Endergebnis um eine positive Zahl handelt.

$$\begin{array}{r} 0011\ 1101 \\ +1101\ 1011 \\ \hline (1)0001\ 1000 \end{array}$$

Ergebnis: $0001\ 1000 = +24_{10}$. Die 1 in der 9-ten Stelle bleibt unberücksichtigt.

Fall b: Minuend und Subtrahend sind positive Zahlen, Minuend < Subtrahend.

$$37_{10} - 61_{10} = -24_{10}$$

Zweierkomplement der Zahl $61_{10} = 0011\ 1101$:

$$\begin{array}{r} 1100\ 0010 \\ +0000\ 0001 \\ \hline 1100\ 0011 \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird nun zu 37_{10} addiert, in diesem Fall entsteht in der höchsten Stelle **kein** Übertrag. Für den automatischen Verfahrensablauf im Rechner ist dies das Zeichen, dass es sich beim Endergebnis um eine negative Zahl handelt, daher sind noch zwei weitere Schritte erforderlich:

$$\begin{array}{r} 0010\ 0101 \\ +1100\ 0011 \\ \hline 1110\ 1000 \end{array}$$

Der Betrag der Subtraktion ist hier das Zweierkomplement dieses Ergebnisses:

$$\begin{array}{r} 0001\ 0111 \\ +0000\ 0001 \\ \hline 0001\ 1000 \end{array}$$

$0001\ 1000 = 24_{10}$ und muss noch mit dem negativen Vorzeichen versehen werden.

- **Multiplikation** (zurückgeführt auf Multiplikationen mit 2 = Linksshift, siehe weiter unten). Da das Ergebnis eine Binärzahl mit maximal $2 \cdot n = 16$ Stellen sein kann, wird der erste Faktor zunächst rechts mit 8 Nullen aufgefüllt und dann – wie im Dezimalsystem – stellenversetzt (= Linksshift) addiert, wenn der zweite Faktor eine 1 aufweist, andernfalls nicht:

$$\begin{array}{r} 0000\ 0000\ 0011\ 1101 \cdot 0010\ 0101 \\ +0000\ 0000\ 1111\ 0100 \\ +0000\ 0111\ 1010\ 0000 \\ \hline 0000\ 1000\ 1101\ 0001 \end{array}$$

Ergebnis: 2257_{10} .

- **Division** (zurückgeführt auf Divisionen durch 2 = Rechtsshift, siehe weiter unten), sie ist die Umkehrung der Multiplikation. Geht man davon aus, dass der Dividend (= die Zahl, die geteilt wird = 2257_{10}) eine 2-Byte-Zahl, der Divisor (= die Zahl, die teilt = 37_{10}) eine 1-Byte-Zahl ist, so erhält man folgende Darstellung:

$$\begin{array}{r} 0000\ 1000\ 1101\ 0001 \div 0010\ 0101 = 0011\ 1101 \\ -0000\ 0100\ 1010\ 0000 \\ \hline 0000\ 0100\ 0011\ 0001 \\ -0000\ 0010\ 0101\ 0000 \\ \hline 0000\ 0001\ 1110\ 0001 \\ -0000\ 0001\ 0010\ 1000 \\ \hline 0000\ 0000\ 1011\ 1001 \\ -0000\ 0000\ 1001\ 0101 \\ \hline 0000\ 0000\ 0010\ 0101 \\ -0000\ 0000\ 0010\ 0101 \\ \hline 0000\ 0000\ 0000\ 0000 \end{array}$$

Die erste Zeile enthält den Minuenden = 2257_{10} . Von diesem wird in der zweiten Zeile der Subtrahend abgezogen. Es ist der Divisor (= 37_{10}), der mit einer solchen Zweierpotenz (hier 2^5) multipliziert wird (entspricht 5 Linksshifts), dass das Produkt (hier 1184_{10}) gerade noch kleiner als der Minuend bleibt. Für den Quotienten rechts wird dafür eine 1 an der Bitstelle 2^5 notiert, also an der Stelle 6 von rechts aus. Die Subtraktion ergibt die dritte Zeile usw. Die Subtraktionen können dabei über das Zweier-Komplement wieder auf Additionen zurückgeführt werden. Da im vorliegenden Beispiel die Division ohne Rest aufgeht, hat die letzte Zeile den Wert 0, andernfalls bleibt ein Rest.

- **Logische Operationen** (werden bitweise ausgeführt, kein Übertrag)

- **Negation** zu $x \rightarrow \neg x$, alle Bit-Werte werden umgekehrt.

$$x = 0010\ 0101 \rightarrow \neg x = 1101\ 1010$$

- **Exklusiv OR** = XOR = Addition MOD 2 (bitweise, **kein Übertrag!**), Operationszeichen „v“, pro Stelle gilt:

Bits gleich: Ergebnis 0

Bits ungleich: Ergebnis 1.

$$\begin{array}{r} 0011\ 1101 \\ \text{XOR } 0010\ 0101 \\ \hline 0001\ 1000 \end{array}$$

- **OR**, Operationszeichen „v“

Beide Bits 0: Ergebnis 0

Wenigstens ein Bit 1: Ergebnis 1

$$\begin{array}{r} 0011\ 1101 \\ \vee 0010\ 0101 \\ \hline 0011\ 1101 \end{array}$$

- **AND**, Operationszeichen \wedge

Wenigstens ein Bit 0: Ergebnis 0

Beide Bits 1: Ergebnis 1

$$\begin{array}{r} 0011\ 1101 \\ \wedge 0010\ 0101 \\ \hline 0010\ 0101 \end{array}$$

- **Linksshift**: Jedes Bit wird um eine Stelle nach links verschoben, von rechts folgt eine 0 nach:

$$\begin{array}{r} 0011\ 1101 \\ 1\ \text{mal}\ 0111\ 1010 \\ 2\ \text{mal}\ 1111\ 0100 \\ 3\ \text{mal}\ 1110\ 1000 \end{array}$$

Linksshifts werden z. B. zur Multiplikation mit Zweierpotenzen verwendet, siehe oben. Jeder Linksshift ergibt eine Multiplikation mit 2. Aber **Vorsicht**: Die links herausfallenden Stellen sind verloren und erzeugen ein falsches Ergebnis. In Microcontrollern gibt es besondere Abfragen, mit denen sich feststellen lässt, ob dies passieren wird.

- **Rechtsshift**: Jedes Bit wird um eine Stelle nach rechts verschoben, von links folgt eine 0 nach:

$$\begin{array}{r} 0011\ 1101 \\ 1\ \text{mal}\ 0001\ 1110 \\ 2\ \text{mal}\ 0000\ 1111 \\ 3\ \text{mal}\ 0000\ 0111 \end{array}$$

Mit Rechtsshifts können z. B. Divisionen durch Zweierpotenzen erzeugt werden, Jeder Rechtsshift ergibt eine Division durch 2. **Aber**: Die rechts herausfallenden Stellen erzeugen ungenaue Ergebnisse. Auch hierfür enthalten Microcontoller besondere Abfragen, mit denen man das prüfen kann.

- **Linksrotation**: Jedes Bit wird um eine Stelle nach links verschoben, das ganz linke Bit wird rechts angefügt:

$$\begin{array}{r} 0011\ 1101 \\ 1\ \text{mal}\ 0111\ 1010 \\ 2\ \text{mal}\ 1111\ 0100 \\ 3\ \text{mal}\ 1110\ 1001 \end{array}$$

Im Gegensatz zum Linksshift gehen hier also keine Bits verloren.

- **Rechtsrotation**: Jedes Bit wird um eine Stelle nach rechts verschoben, das ganz rechte Bit wird links angefügt:

0011 1101
1 mal 1001 1110
2 mal 0100 1111
3 mal 1010 0111

Im Gegensatz zum Rechtsshift gehen hier ebenfalls keine Bits verloren.

3 Auffrischung zu elementaren Operationen und Verfahren

Das Folgende in diesem Kapitel ist vermutlich bereits aus anderen Ausbildungseinheiten bekannt und wird daher nur kurz wiederholt..

3.1 Lösen quadratischer Gleichungen (pq-Formel, Mitternachtsformel)

$$x^2+bx+c=0 \rightarrow x_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3.2 Behandeln von Betragsausdrücken

Regeln: $|x|=+x$ für $x>0$, $|x|=-x$ für $x<0$, $|x|=0$ für $x=0$

Hinweis: Manchmal schreibt man zur Vereinfachung auch $|x|=+x$ für $x\geq 0$ und $|x|=-x$ für $x\leq 0$. Der Fall $|0|$ wird dann entweder als $+0=0$ oder $-0=0$ interpretiert. Diese Darstellung kollidiert mit der Verwendung von $+0$ und -0 bei **Grenzwertbetrachtungen**, siehe Kapitel 3.15, es ist also Vorsicht geboten :

+0 → soll ausdrücken, wie sich ein Funktionswert $f(x)$ entwickelt, wenn sich x dem Wert 0 von rechts nähert.

-0 → soll ausdrücken, wie sich ein Funktionswert $f(x)$ entwickelt, wenn sich x dem Wert 0 von links nähert.

Bleiben wir bei der vereinfachten Darstellung, dann ist z. B.

$$|x+a|=x+a \text{ für } x+a\geq 0, \text{ also } x\geq -a \text{ und } -(x+a) \text{ für } (x+a)\leq 0, \text{ also } x\leq -a$$

Außerdem gilt: $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ und $|x+y|\leq|x|+|y|$ (die Dreiecksungleichung).

3.3 Behandeln von Ungleichungen

Regeln:

$$x>a \rightarrow x+b>a+b \text{ (Addition des gleichen Wertes auf beiden Seiten)}$$

$$x>a \rightarrow x\cdot b>a\cdot b \text{ für } b>0 \text{ , aber } x\cdot b<a\cdot b \text{ für } b<0 \text{ (Umkehrung der Relation)}$$

3.4 Kleinstes gemeinsames Vielfache (= kgV) zweier ganzer Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$

Man zerlegt die Zahlen m und n in ihre Primfaktoren. Das $\text{kgV}(m, n)$ ist dann das Produkt aller Primfaktoren in ihrer höchsten vorkommenden Potenz. Beispiel:

$$m=240=2^4 \cdot 3 \cdot 5, \quad n=298=2^5 \cdot 3^2 \rightarrow \text{kgV}(240,298)=2^5 \cdot 3^2 \cdot 5=1490$$

Haben m und n keine gemeinsamen Primfaktoren, so ist $\text{kgV}(m,n)=m \cdot n$.

Für beliebige reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es nur in Sonderfällen ein „echtes“ $\text{kgV}(a,b) < a \cdot b$.
 Beispiel:

$$a=\sqrt{2}, \quad b=2 \rightarrow \text{kgV}(\sqrt{2}, 2)=2 \quad (\text{und nicht } a \cdot b), \text{ da } 2=[\sqrt{2}]^2.$$

3.5 Addition und Subtraktion von rationalen Ausdrücken (Brüchen).

Zur Addition und Subtraktion bringt man alle Brüche auf den gemeinsamen Nenner. Dieser ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) aller Einzelnenner oder auch das gemeinsame Vielfache aller Nenner, wenn man es sich einfach machen will. Jeder Bruch muss dann im Zähler entsprechend erweitert werden. Beispiele für zwei und drei Summanden:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf}{bdf} + \frac{bcf}{bdf} + \frac{ebd}{bdf} = \frac{adf+bcf+ebd}{bdf}.$$

Niemals: Nenner für sich und Zähler für sich addieren oder subtrahieren, also niemals

~~$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$~~

. Das darf ab sofort **nie** wieder passieren!

3.6 Multiplikation und Division von rationalen Ausdrücken (Brüchen)

- Multiplikation zweier oder mehrerer Brüche

Es werden alle Zähler der Teilbrüche für sich und alle Nenner der Teilbrüche für sich multipliziert. Beispiel:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f}$$

- Division zweier Brüche (Division mehrere Brüche \rightarrow hintereinander ausführen).

Multiplikation mit dem Kehrwert. Beispiel:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right) = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

3.7 Potenzrechnung

Regeln:

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (\text{n-maliges Multiplizieren von } a)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \dots \cdot a} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{Kehrwert})$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (\text{Addition der Exponenten bei } \mathbf{\text{gleicher}} \text{ Basis } a)$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad (\text{Multiplikation der Exponenten})$$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (Potenz eines Produktes ist Produkt der Potenzen)

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (n-te Wurzel aus a)

$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$

$0^n = 0$

0^0 **undefiniert !**

3.8 Kompaktschreibweise für Summen und Produkte

Wenn Summenterme in einer Summe gleichen Aufbau haben, kann man die Summe kompakt mit Hilfe des Summenzeichens (griechisches großes „Sigma“) schreiben. Der Index i durchläuft alle ganzzahligen Werte zwischen der unteren und der oberen Grenze. Beispiel:

$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} \cdot x^{n-i}$

Die Reihenfolge kann aufgrund des Kommutativgesetzes vertauscht werden.

Für Produktterme gilt Entsprechendes. Hier verwendet man das Produktzeichen (griechisches großes „Pi“). Beispiel:

$f(x) = (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1}) \cdot (x-x_n) \rightarrow f(x) = \prod_{i=1}^{i=n} (x-x_i)$

3.9 Polynome, Zusammenhang zwischen Nullstellen und Koeffizienten:

$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \rightarrow$ kompakt: $f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} \cdot x^{(n-i)}$, siehe Kapitel 3.8

Oft verwendet man die **normierte** Form mit $a_n = 1$. Durch Division $f^*(x) = \frac{f(x)}{a_n}$ kann man jedes Polynom in die normierte Form bringen.

Sind die **Nullstellen** x_1, x_2, \dots, x_n gegeben, lässt sich $f(x)$ auch als Produkt der Linearfaktoren schreiben:

$f(x) = (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n) = \prod_{i=1}^{i=n} (x-x_i)$, siehe Kapitel 3.8. Hier ist stets $a_n = 1$.

Nach **Vieta** gilt folgender Zusammenhang zwischen Nullstellen und Koeffizienten, (dabei das alternierende Vorzeichen beachten):

$$a_{n-1} = (-1)^1 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} x_i \quad \rightarrow \text{Summe aller Nullstellen}$$

$$a_{n-2} = (-1)^2 \cdot \sum_{\substack{i=1, j=2, \\ i < j}}^{i=n-1, j=n} x_i \cdot x_j \quad \rightarrow \text{Summe aller Zweierprodukte aus allen Nullstellen}$$

$$a_{n-3} = (-1)^3 \cdot \sum_{\substack{i=1, j=2, k=3, \\ i < j < k}}^{i=n-2, j=n-1, k=n} x_i \cdot x_j \cdot x_k \quad \rightarrow \text{Summe aller Dreierprodukte aus allen Nullstellen}$$

.....

Die Darstellung weiterer Koeffizienten wird in exakter Schreibweise unübersichtlich, daher Angabe mit Hilfe der Verbalform:

$$a_4 = (-1)^4 \cdot \text{Summe aller Viererprodukte aus allen Nullstellen}$$

.....

$$a_1 = (-1)^{n-1} \cdot \text{Summe aller } (n-1)\text{-Produkte aus allen Nullstellen}$$

$$a_0 = (-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{i=n} x_i = (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

Beispiel: Gegeben sind alle Nullstellen $x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-4$ des Polynoms $f(x)$.

$f(x)$ hat den Grad $n=4$. Die Koeffizienten berechnen sich als

$$a_3 = (-1)^1 \cdot (1 - 1 + 2 - 4) = +2$$

$$a_2 = (-1)^2 \cdot [1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot (-4)] = -9$$

$$a_1 = (-1)^3 \cdot [1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-4) + 1 \cdot 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 \cdot (-4)] = -2$$

$$a_0 = (-1)^4 \cdot [1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-4)] = +8$$

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$$

Prüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Matlab- oder Scilab-Funktion `roots` ([...]) nach.

Und noch ein **Hinweis**: Eine reelle Zahl p kann als Polynom vom Grad 0 interpretiert werden:

$$f(x) = p \cdot x^0 = p$$

3.10 Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad \text{mit} \quad 0! = 1, \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Beispiel: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

3.11 Alternierende (wechselnde) Vorzeichen

Diese werden als Potenzen von (-1) dargestellt: $(-1)^i$ für $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Beispiele: $(-1)^3 = -1$, $(-1)^6 = +1$ (siehe z. B. auch beim Wurzelsatz von Vieta).

3.12 Darstellung gerader und ungerader natürlicher Zahlen

Gerade Zahlen sind Vielfache von 2: $m_{\text{gerade}} = k \cdot 2$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$

Ungerade Zahlen sind Vielfache von 2, vermindert oder vergrößert um 1: $m_{\text{ungerade}} = 2 \cdot k \pm 1$

Beispiele: $14 = 7 \cdot 2$, $23 = 11 \cdot 2 + 1$

3.13 Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \quad , \text{ mit } \binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = n \quad , \quad \binom{n}{n} = 1$$

3.14 Binomische Ausdrücke

Diese sind Sonderfälle des Wurzelsatzes von Vieta für Polynome, welche genau **eine** mehrfache Nullstelle der Vielfachheit n aufweisen:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + b^n$$

Kompakt: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} \cdot a^{(n-i)} \cdot b^i$

$$(a-b)^n = a^n + (-1)^1 \cdot \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + (-1)^2 \cdot \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + (-1)^{(n-1)} \cdot \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + (-1)^n \cdot b^n$$

Kompakt: $(a-b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot a^{(n-i)} \cdot b^i$

3.15 Polynomdivision

Wenn der Zählergrad eines rationalen Polynomausdruckes gleich oder größer als der Nennergrad ist, kann man durch Ausführen der Division einen ganz-polynomischen (oder ganz-rationalen) Anteil abspalten, siehe Beispiel in Kapitel 3.17 unter „Asymptoten“.

Beispiel: $f(x) = \frac{(x-4)^4}{x+1} = \frac{x^4 - 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1}{x+1} = x^3 - 5x^2 + 11x - 15 + \frac{16}{x+1}$

Die Division erfolgt ähnlich der bei reellen Zahlen: Die passenden Vielfachen des Divisors (= Teiler, Nenner) werden so lange **stelligengenau** (= potenz-genau) vom Dividenden (= „der zu Teilende“, Zähler) subtrahiert, bis der Grad des Divisionsrestes kleiner als der Grad des Nennerpolynoms

wurde. Der Rest $r(x)$ ist dann ein „echter“ rationaler Polynomausdruck:

$$\begin{array}{r}
 x^4 + + 6x - 4x + 1 : x + 1 = x^3 - 5x^2 + 11x - 15 + \boxed{r(x)} \\
 \underline{x^4 + x^3} \\
 0 - 5x^3 \\
 \quad \underline{- 5x^3 - 5x^2} \\
 + 11x^2 \\
 + 11x^2 + 11x \\
 \underline{0 - 15x} \\
 - 15x - 15 \\
 \underline{0 + 16} \rightarrow \text{Divisionsrest = Zähler von } r(x)
 \end{array}$$

$$\text{Rest}=r(x)= \frac{16}{x+1}$$

Grenzwerte

Grenzwerte einer Funktion $f(x)$ geben den Wert der Funktion an, wenn sich x auf dem Zahlenstrahl beliebig

- von links oder rechts einem festen Wert a
- von links gegen $+\infty$
- von rechts gegen $-\infty$

nähert. Eine übliche Schreibweise ist z. B.

$\lim_{x \rightarrow +a} (f(x))$ Wert von $f(x)$, wenn sich x von rechts beliebig dem Wert a nähert.

$\lim_{x \rightarrow -a} (f(x))$ Wert von $f(x)$, wenn sich x von links beliebig dem Wert a nähert.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$ Wert von $f(x)$, wenn x von links gegen $+\infty$ strebt.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))$ Wert von $f(x)$, wenn x von rechts gegen $-\infty$ strebt.

3.16 Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist im Intervall $a < x < b$ stetig, wenn linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert in jedem Punkt des Intervalls übereinstimmt. Beispiele:

- Polynome sind im gesamten Definitionsbereich $-\infty < x < +\infty$ stetig.
- Die Hyperbel -Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat eine Unstetigkeitsstelle bei $x=0$ (warum?).
- Die Logarithmus-Funktion ist stetig für $0 < x < +\infty$.
- Die rationale Polynom-Funktion $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ hat die beiden Unstetigkeitstellen $x = \pm 1$ (warum?).

Merkhilfe: (von Mathematikern als unscharf nicht gern gesehen ...) Stetig ist eine Funktion, wenn man sie mit einem Stift ohne abzusetzen zeichnen kann.

Hinweis: Unstetigkeitsstellen einer Funktion sind nicht zu verwechseln mit **Unbestimmtheitsstellen**, an denen die Funktion überhaupt nicht definiert ist, z. B. wie bei

$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ mit $x=-1$, da hier der Ausdruck $f(-1) = \left(\frac{0}{0}\right)$ entsteht. Dieser Ausdruck ist nicht definiert.

3.17 Nullstellen, Polstellen, Asymptoten

Nullstellen sind diejenigen Abszissenwerte x einer Funktion $f(x)$, an denen diese den Wert 0 annimmt. Die Funktion $f(x)$ kann eine beliebige Funktion sein, für die $f(x=a)=0$ ist, es trifft also nicht nur für Polynomfunktionen zu.

Beispiele: $f(x) = x^2 + 3 \cdot x + 2 \rightarrow f(x=-1) = 0, f(x=-2) = 0$
 $f(x) = \sin(x) \rightarrow f(x=\pi) = 0, f(x=2 \cdot \pi) = 0$
 $f(x) = e^{-x} - 0.5 \rightarrow f(x = -\ln(0.5)) = 0$

Aber Vorsicht: Enthält die Funktion $f(x)$ Nennerterme, so dürfen diese für $x=a$ **nicht** zugleich den Wert 0 annehmen, da in diesen Fällen **Unbestimmtheitsstellen** $\left(\frac{0}{0}\right)$ vorliegen, welche nicht definiert sind. Man kann versuchen, solchen Unbestimmtheitsstellen mit Hilfe der l'Hospital-Regel einen definierten Wert zuzuweisen, siehe Kapitel 19.3.2.

Beispiel: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \rightarrow f(x=-1) \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow$ **unbestimmt!**

Ähnliches gilt, wenn die Funktion $f(x)$ aus Produkten von Teilfunktionen besteht, bei denen wenigstens ein Paar bei $x = a$ die Werte 0 und ∞ annimmt.

Beispiel: $f(x) = g(x) \cdot h(x) = (x-\pi) \cdot \cotan(x) \rightarrow f(x=\pi) \rightarrow 0 \cdot \infty \rightarrow$ **unbestimmt!**

Polstellen sind Werte von $x=b < \pm\infty$, bei denen die Funktion $f(x=b)$ gegen $\pm\infty$ läuft. Dann handelt es sich um Unstetigkeitsstellen (nicht verwechseln mit Unbestimmtheitsstellen).

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{(x-3)}$ $\rightarrow f(x_{\text{links}} \rightarrow 3) \rightarrow -\infty$ (Annäherung von links oder rechts beachten).

Asymptoten sind Funktionen $g(x)$, denen sich eine gegebene Funktion $f(x)$ an bestimmten Stellen $x=a$ oder $x \rightarrow \pm\infty$ annähert, ohne sie zu „erreichen“ oder zu „schneiden“ (diese Bezeichnungen sind zwar anschaulich, aber mathematisch unpräzise), also

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(x) \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = g(x)$$

Als Asymptoten-Funktionen $g(x)$ kommen alle in Frage, welche die obige Bedingung erfüllen. Häufig treten horizontale und/oder vertikale Asymptoten sowie Polynomfunktionen auf. **Hinweis:** Taylorreihen (Kapitel 19.3.3) weisen als Polynomfunktionen eine entfernte Verwandtschaft zu Asymptotenfunktionen $g(x)$ auf. Im Unterschied zu diesen haben sie allerdings einen Punkt mit der Funktion $f(x)$ gemeinsam.

Beispiele:

$$f(x) = \frac{2}{x+4} \rightarrow f(x_{\text{links}} \rightarrow -4) \quad \text{und} \quad f(x_{\text{rechts}} \rightarrow -4)$$

\rightarrow der Graph von $f(x)$ ist eine vertikale Linie bei $x=-4$, dabei Annäherung x von links oder rechts

an -4 beachten.

$$f(x) = \frac{2}{x+4} \rightarrow f(x \rightarrow -\pm\infty) \rightarrow g(x) = 0, \text{ also die x-Achse.}$$

Dabei nähert sich $f(x \rightarrow -\infty)$ der x-Achse von „unten“, bei $f(x \rightarrow +\infty)$ von „oben“.

$$f(x) = \frac{(x-4)^4}{x+1} \rightarrow g(x) \text{ ist der ganz-polynomische Anteil des Divisionsergebnisses}$$

$$f(x) = x^3 - 5 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 15 + \frac{16}{x+1} \rightarrow g(x) = x^3 - 5 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 15 .$$

3.18 Rationale Polynomfunktionen

$$f(x) = \frac{b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + b_1 \cdot x + b_0}{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0}$$

In der oft verwendeten **normierten** Darstellung sind die Koeffizienten bei den höchsten Potenzen x^m im Zähler bzw. x^n im Nenner gleich 1:

$$f^*(x) = \frac{x^m + b^*_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + b^*_1 \cdot x + b^*_0}{x^n + a^*_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a^*_1 \cdot x + a^*_0} = \frac{a_n}{b_m} \cdot f(x)$$

Die normierte Darstellung $f^*(x)$ unterscheidet sich von $f(x)$ um einen konstanten Faktor.

Ist $m \geq n$, so kann durch Ausführen der Polynomdivision ein ganz-polynomischer Ausdruck abgespalten werden. Dabei bleibt, ähnlich wie bei Brüchen mit Zahlen, ein „echter“ rationaler Polynomausdruck mit „Zählergrad kleiner Nennergrad“ übrig. Siehe Beispiel in Kapitel 3.17 unter „Asymptoten“

3.19 Exponential-Funktionen

Regeln:

$$f(x) = \exp(x) = e^x$$

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = 2.781 \dots \rightarrow \text{Eulerzahl}$$

$$f(x) = a^x = \left(\frac{a}{e}\right)^x = \left(\frac{a}{e}\right)^x \cdot e^x$$

3.20 Logarithmus-Funktionen

Regeln:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad (\text{Umrechnung in verschiedene Basen a und b})$$

$$x = a^y \rightarrow y = \log_a(x)$$

$$\log_a(x \cdot z) = \log_a(x) + \log_a(z)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{z}\right) = \log_a(x) - \log_a(z)$$

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$$

$$\log_a(1) = 0$$

4 Folgen und Reihen

4.1 Folgen

Folgen sind abzählbare, endliche oder unendliche Mengen a mit Elementen a_i , die im Allgemeinen ein gemeinsames Bildungsgesetz haben (aber nicht notwendig müssen!). Die Elemente sind mit dem Index i der natürlichen Zahlen gekennzeichnet, um eine Reihenfolge fest zu legen.

Beispiele: $A = 2, 5, 8, 11, 14, \dots = a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \dots, a_i, \dots, i=1, 2, 3, \dots$ (I)

$$A = -3, 6, -12, 24, \dots = a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \dots, a_i, \dots, i=1, 2, 3, \dots$$
 (II)

Zwei einfache Vertreter sind

- die **arithmetische Folge**: Jedes Element geht aus dem Vorhergehenden durch Addition einer Konstanten k hervor:

$$a_1, a_2 = a_1 + k, k \in \mathbb{R}, a_{i+1} = a_i + k \quad \text{oder} \quad a_i = a_1 + (i-1) \cdot k$$

Beispiel: Siehe (I), hier ist $a_1 = 2, k = 3$.

- die **geometrische Folge**: Jedes Element geht aus dem Vorhergehenden durch Multiplikation mit einer Konstanten k hervor:

$$a_1, a_2 = a_1 \cdot k, k \in \mathbb{R}, a_{i+1} = a_i \cdot k \quad \text{oder} \quad a_i = a_1 \cdot k^{(i-1)}$$

Beispiel: Siehe (II), hier ist $a_1 = -3, k = +2$, das Vorzeichen wechselt, es „alterniert“.

- Der Anfangsindex muss nicht $i = 1$ sein, er kann beliebig gewählt werden. Üblich sind aber $i=0$ oder $i=1$.

Der Vertreter einer endlichen Folge mit 15 Elementen ist z. B.

- $A = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 31, 100, 121, ?$

Bestimmen Sie das letzte Element selbst. Man kann es in zwei unterschiedlichen Formen darstellen. Für die Lösung ist das Bildungsgesetz zu ermitteln.

4.2 Folgen und rekursive Gleichungen

Die Elemente der arithmetischen und geometrischen Folge gehen auseinander durch **Rekursion** hervor. Das nächste Element ergibt sich hier **rekursiv** immer aus dem Vorhergehenden. Die Gleichungen

$$a_{i+1} = a_i + k \quad \text{oder} \quad a_{i+1} = a_i \cdot k$$
 benötigen also

- eine willkürliche Festlegung für den Anfangsindex, z. B. $i=0$ oder $i=1$ oder $i=-5$
- ein Startelement, z. B. $a_0 = 1$ oder $a_1 = -3$ oder $a_{-5} = 221$.

Dieses Prinzip lässt sich auf rekursive Gleichungen erweitern, bei denen für den Start mehrere Anfangselemente in aufsteigender Indexreihenfolge gegeben sind.

- Eine berühmte Folge ist die Fibonacci-Folge, benannt nach Leonardo Fibonacci, der damit Anfang des 13. Jahrhunderts versuchte, das Wachstum von Tierpopulationen zu beschreiben. Die Rekursionsgleichung ist

$$a_i = a_{i-1} + a_{i-2}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

Der Quotient zweier benachbarter Elemente strebt übrigens für große i gegen die Zahl ϕ des **goldenen Schnitts**, eine irrationale Zahl, die in Natur und Kunst ein oft zu beobachtendes

oder verwendetes Längenverhältnis beschreibt:

$$gs = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{a_{i-1}} = 1.618... \quad .$$

- Auch die auf dem Hilfsblatt für den Euklidischen Algorithmus dargestellte Gleichung zur Ermittlung **modularer inverser Zahlen** (zwingend erforderlich in der im Internet z. B. beim https-Protokoll verwendeten asymmetrischen Verschlüsselung) ist rekursiv.
- Weiterhin sind rekursive Gleichungen als **Differenzgleichungen** zentrale Hilfsmittel der digitalen Nachrichten- und Regelungstechnik (Abtast-Technik). So kann man etwa den Ladevorgang an einem Kondensator zu diskreten Zeitpunkten mithilfe der Differenzgleichung

$$x_{i+1} + c_0 \cdot x_i = 1 \quad i=0, 1, 2, \dots, \quad x_0=0, \quad 0 < c_0 < 1$$

für die Kondensatorspannung beschreiben. Setzen Sie z. B. $c_0=0.5$ und berechnen Sie ein Paar Werte. Zu welchem Wert strebt x_1 vermutlich? Versuchen Sie auch $c_0=-0.5$.

- Rekursive Gleichungen gibt es außerdem für komplexe Zahlen und erzeugen hiermit die Mandelbrotmengen, die eine enge Verwandtschaft zum Verfahren der Datenkompression mithilfe von Fraktalen aufweisen.

4.3 Reihen

Reihen sind endliche oder unendliche Summen S_n von n Folgen-Elementen. Um eine Reihe kompakt schreiben zu können, benutzt man das Summenzeichen (griechischer Großbuchstabe „Sigma“):

$$S_5 = \sum_{i=1}^{i=5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \quad \text{oder}$$

$$S_\infty = \sum_{i=1}^{i \rightarrow \infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{i-1} + a_i + \dots$$

Zu den beiden zuvor genannten Folgen gibt es

- die **arithmetischen Reihe**. Sie wird z. B. bei bestimmten Formen der Zinsrechnung benötigt und berechnet sich aus der Definition der Folge als

$$\begin{aligned} S_5 &= \sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 + (a_1+k) + (a_1+2k) + \dots + (a_1+(n-1)k) \\ &= (n+1) \cdot a_1 + k \cdot (1+2+3+\dots+(n-1)) = n \cdot a_1 + \frac{k \cdot (n-1) \cdot n}{2} \end{aligned}$$

(Bitte am Beispiel (I) nachprüfen)

- die **geometrische Reihe**. Auch sie wird u. a. bei bestimmten Formen der Zinsrechnung benötigt und berechnet sich aus

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

(Bitte am Beispiel (II) nachprüfen).

Falls der Betrag von $|k| < 1$ ist, konvergiert die geometrische Reihe für $n \rightarrow \infty$ und hat den Wert

$$S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-k}$$

Es gibt eine Vielzahl weiterer endlicher und konvergierender unendlicher Reihen, Letztere mit teilweise merkwürdigen Ergebnissen :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e \quad (\text{Zur näherungsweisen Berechnung der Eulerzahl } e^1)$$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots = \frac{1}{e} \quad (\text{Reziproke Eulerzahl})$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Zur näherungsweisen Berechnung von } \pi)$$

Für Rechnungen der Ingenieurtechnik werden oft unendliche Reihen - z. B. als Taylorreihen - verwendet. Sie stellen dann Polynomfunktionen in der Variablen x dar. Damit lassen sich unter bestimmten, oft vorliegenden Voraussetzungen andere nichtlineare Funktionen in der leichter weiter zu verarbeitenden Polynomform darstellen, siehe Kapitel 19.3.3.

5 MATLAB (oder Scilab) als „Super-Taschenrechner“

Die in unserem Rahmen auszuführenden Berechnungen und grafischen Darstellungen können außer von Hand oder im Kopf alle mit Hilfe von Taschenrechnern gemacht werden. Das Rechnen von Hand ist dabei eine mechanische Tätigkeit ohne Gewinn für die eigentlich wichtigen Erkenntnisse über Grundlagen und Zusammenhänge der Mathematik. Außer bei kleinen Aufgabenumfängen, also solchen mit „kleinen“ Zahlen und wenigen Rechenoperationen, gibt es nur ein bedeutsames Einsatzgebiet, bei dem Hand- und vor allem Kopfrechnungen eine **unschlagbare** Berechtigung haben: Das **Schätzen von Größenordnungen**.

Es wird dringend empfohlen, dies laufend zu trainieren. Anlässe bieten sich im Überfluss, wenn man seine Umgebung daraufhin betrachtet. Der Vorzug liegt darin, dass man hiermit schnell Plausibilitätsprüfungen von Rechenergebnissen erhält. Drei kleine Beispiele:

- Wie hoch ist etwa ein 26-stöckiges Hochhaus?
- Wie viel Liter Wasser fließen etwa pro Sekunde durch den Main bei normalen Verhältnissen?
- Wie viel elektrische Energie in KWh verbraucht etwa eine 20-Watt-Energiesparlampe in einem Monat bei täglich 4 Stunden Anschaltzeit?
- Welche Gesamtkraft in Newton wirkt etwa ohne Eigenlast auf eine Brücke, wenn 12 PKW und 3 LKW mit Hänger darüber fahren?

Für die Ermittlung genauer Ergebnisse lässt sich dann u. a. sehr gut auch das Mathematik-Paket **MATLAB** einsetzen, da es einen gewaltigen Umfang leistungsfähigster mathematischer Funktionen und Verfahren bietet. **Ausdrücklich** wird aber festgestellt, dass man es im Rahmen dieser Veranstaltung nicht benötigt und sein Gebrauch auch kein Bestandteil von Prüfungsleistungen ist.

Alternativ kann man das MATLAB-ähnliche, kostenfrei installierbare Paket **Scilab** einsetzen.

Will man MATLAB Ergänzung der eigenen Rechenarbeit nutzen, kann man es

- an der HS AB entweder aus dem dem V-Laufwerk/Unterordner „Programme“ mit Hilfe des dort liegenden Batch-Files aufrufen
- oder auf dem eigenen PC kostenfrei installieren (bei Interesse bitte nachfragen).

Beim Starten von MATLAB öffnet sich das sogenannte „Command Window“, ein Eingabefenster für eine außerordentlich große Menge von Funktionen, u. a.

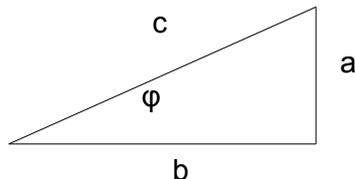
- Elementare Funktionen für Trigonometrie, Logarithmen, Potenzen, Komplexe Rechnungen
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
- grafische Darstellungen von Lösungsverläufen
- Integrale und Ableitungen,

die im Rahmen der Technischen Mechanik und Elektrotechnik hilfreich sind. Zu Einzelheiten bitte

nachfragen.

6 Trigonometrische Funktionen I

In der Ingenieurtechnik werden zur Darstellung technischer Sachverhalte sehr oft Winkelangaben benötigt. Daher sind hier Winkelfunktionen hilfreich. Sie werden über rechtwinklige Dreiecke als Verhältnisse der Seiten definiert.



- Sinus-Funktion: $\sin(\phi) = \frac{a}{c}$ (Gegenkathete zu Hypothenuse)
- Cosinus-Funktion: $\cos(\phi) = \frac{b}{c}$ (Ankathete zu Hypothenuse)
- Tangens-Funktion: $\tan(\phi) = \frac{a}{b}$ (Gegenkathete zu Ankathete)
- Cotangens-Funktion: $\cotan(\phi) = \frac{1}{\tan(\phi)} = \frac{b}{a}$ (Ankathete zu Gegenkathete)

Wenn man als Einheit der Hypothenuse die „Länge“ 1 wählt, so erhält man den Wert der Sinus- und der Cosinus-Funktion direkt als „Länge“ der Gegenkathete oder Ankathete. Die trigonometrischen Funktionen werden im Kapitel ??? noch ausführlicher behandelt.

7 Vektoren und Koordinatensysteme

Zahlen gemäß Kapitel 1 werden als skalare Größen oder kurz als **Skalare** bezeichnet. Mit ihnen kann man die physikalische Größen von Temperaturen, elektrischen Spannungen, Energien oder Leistungen bezeichnen. Sie sind durch die Angabe eines einzigen Zahlenwertes und einer Dimension eindeutig beschrieben. Beispiele:

- 1.65 Volt (Spannung einer frischen Mignonzelle)
- 1.3 KW (elektrische Leistung einer Kochplatte)
- 21.3 Grad Celsius (Temperatur im Hörsaal)

Für die Kennzeichnung anderer Größen, z. B. von Kräften und Drehmomenten, benötigt man dagegen mehr als eine Zahl, weil sie

- eine Norm (hier → Länge)
- eine Richtung (= Winkel)
- einen Anfang
- und einen Richtungssinn

aufweisen. Solche Größen bezeichnet man als **Vektoren**. Eine wenig anschauliche, aber für das Rechnen einfache Darstellung von Vektoren ist die in Koordinaten oder Komponenten. Damit ist indirekt deren Norm und Richtung gegeben. Die Koordinaten

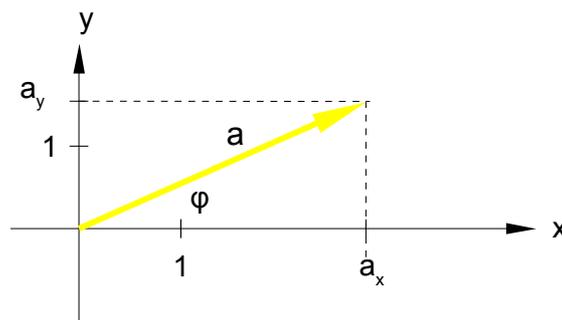
lassen sich entweder nebeneinander in Zeilenform oder übereinander in Spaltenform notieren. Wir verwenden hier ausschließlich die Spaltenform. Der Vektor a mit zwei Komponenten a_x und a_y hat dann die Spaltenform

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} .$$

Da diese Schreibweise aber viel Platz verbraucht, drehen wir die Spalte in eine Zeile, was sich mit der Funktion „Transponieren“ bewirken lässt und mit einem hochgestellten „T“ gekennzeichnet wird:

$$a^T = [a_x, a_y] \text{ oder } a = [a_x, a_y]^T$$

Die Komponenten sind die Abschnitte auf der x- und y -Achse eines rechtwinkligen (= kartesischen) x,y-Koordinatensystems:



Hierbei wird stillschweigend der Anfang in den Koordinatenursprung (0,0) gelegt und der Richtungssinn vom Ursprung weg zeigend angenommen (Pfeilspitze). Damit sind von den vier oben genannten Angaben nur zwei erforderlich, die beiden Komponenten der Pfeilspitze.

Die Norm kann über den Pythagoras, der Winkel ϕ über die trigonometrischen Funktionen berechnet werden. Es ist

$$\|a\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad , \quad \tan(\phi) = \frac{a_y}{a_x} \quad , \quad \phi = \arctan \frac{a_y}{a_x} .$$

Hinweis: In der Literatur findet man zur Kennzeichnung von Vektoren auch Darstellungen wie \vec{a} oder \underline{a} . Da man skalare Größen auch als eindimensionale Vektoren auffassen kann, verzichten wir hier auf eine solche Kennzeichnung.

Vektoren mit zwei Komponenten sind zweidimensional, liegen also in der Ebene, z. B. in der Zeichenebene. Allgemein gibt es aber Vektoren in beliebigen Dimensionen, wobei physikalische Vektoren nur bis zur dritten Dimension (= Raumdimension) sinnvoll und vorstellbar sind. Dreidimensionale Vektoren werden durch 3 Komponenten beschrieben, es kommt die Komponente a_z der z-Achse eines räumlichen Koordinatensystems dazu:

$$a = [a_x, a_y, a_z]^T .$$

Die Norm berechnet sich aus dem räumlichen Pythagoras

$$\|a\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Die Richtung muss hier über zwei Raumwinkel angegeben werden, die sich ebenfalls aus den Komponenten ermitteln lassen. Dies ist aber aufwändig und wird vorerst nicht gebraucht.

7.1 Rechenoperationen mit Vektoren

Für zwei Vektoren

$$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T, \quad \mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$$

(a und b sind Spaltenvektoren!) lassen sich folgende Operationen definieren:

Addition (Subtraktion) von Vektoren:

Die Komponenten werden komponentenweise addiert (oder subtrahiert):

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_x, a_y, a_z]^T + [b_x, b_y, b_z]^T = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]^T.$$

Multiplikation mit Vektoren:

Hier gibt es 5 unterschiedliche:

1. Multiplikation eines Vektors \mathbf{a} mit einem Skalar t (= einer Zahl)

$$\mathbf{c} = t \cdot \mathbf{a} = [t \cdot a_x, t \cdot a_y, t \cdot a_z]^T$$

Die Vektorkomponenten werden einzeln mit dem Skalar t multipliziert. Das Ergebnis ist der Vektor \mathbf{c} , er hat die gleiche Richtung wie \mathbf{a} , aber eine andere Norm:

$$\|\mathbf{c}\| = t \cdot \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Solche Multiplikationen dienen z. B. der Beschreibung der Kraft eines hydraulisch betriebenen Kolbens, wenn sich der Öldruck verändert, die Position des Zylinders aber fest bleibt.

2. **Skalar**multiplikation zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} , das Operationszeichen ist der „Mal“-Punkt:

$$u = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [a_x, a_y, a_z]^T \cdot [b_x, b_y, b_z]^T = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Als Ergebnis erhält man eine Zahl (= Skalar). Eine anderer Berechnungsweg ist der aus den beiden Normen und dem von den Vektoren eingeschlossenen Winkel:

$$u = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos(\phi).$$

Wenn man u aus der oberen Gleichung bestimmt und zusätzlich die beiden Beträge ermittelt, lässt sich der Winkel angeben:

$$\phi = \arccos\left(\frac{u}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}\right)$$

Insbesondere eignet sich dieses Verfahren als einfacher **Orthogonalitätstest**: Wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen, ist $\phi = 90^\circ$ und $u = 0$. Man braucht dann den Winkel nicht extra zu berechnen.

3. **Vektor**multiplikation zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} , das Operationszeichen ist das „Mal“-Kreuz:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= [a_x, a_y, a_z]^T \times [b_x, b_y, b_z]^T \\ &= [a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y, a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z, a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x]^T = [c_x, c_y, c_z]^T \end{aligned}$$

Als Ergebnis erhält man einen Vektor \mathbf{c} , der die Eigenschaft hat, auf den beiden anderen senkrecht zu stehen. Für die Norm gibt es die zur Skalarmultiplikation ähnliche Formel

$$\|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin(\phi).$$

Zusammen mit der oberen Gleichung lässt sich dies wieder nutzen, um den Winkel

zwischen den beiden Vektoren a und b zu ermitteln. Man kann diesen Zusammenhang aber auch für einen **Parallelitätstest** nutzen. Sind beide Vektoren parallel, so hat der Winkel den Wert $\phi=0^\circ$, die Norm wird $\|c\|=0$ und die obere Gleichung weist in jeder Komponente eine 0 auf. Auch hier muss der Winkel nicht extra bestimmt werden.

Vektorprodukte ergeben sich z. B. aus der Multiplikation einer Kraft mit einem Hebelarm als **Drehmomentvektor**.

4. Multiplikation eines Vektors a mit einer Matrix M , das Operationszeichen ist der „Mal“-Punkt:

Zur Wahrung der Übersicht wird hier wieder ein zweidimensionaler Vektor $a=[a_x, a_y]^T$ gewählt, das Folgende gilt aber entsprechend für beliebige Dimensionen. Die Matrix M ist eine quadratische Anordnung von Elementen in Zeilen und Spalten:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} .$$

Man könnte M auch als zwei nebeneinander angeordnete Spaltenvektoren ansehen.

$$c = M \cdot a = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot [a_x, a_y]^T = [a_x \cdot m_{11} + a_y \cdot m_{12}, a_x \cdot m_{21} + a_y \cdot m_{22}]^T = [c_x, c_y]^T .$$

Als Ergebnis entsteht hier wieder ein zweidimensionaler Vektor c . Er hat gegenüber a im allgemeinen eine andere Norm und eine andere Richtung, die Multiplikation mit der Matrix M bewirkt also eine **Streckung** und eine **Drehung** von a .

Hinweise:

- Ein Spaltenvektor wird immer von rechts an die Matrix multipliziert.
- Die Matrix M muss zwar immer genau so viele Spalten aufweisen, wie der Dimension des Vektors a entspricht, sie kann aber auch mehr Zeilen haben. Als Ergebnis erhält man einen entsprechend höher-dimensionalen Vektor. Auf die Bedeutung soll hier zunächst nicht eingegangen werden.

5. Multiplikation eines Vektors mit einer speziellen Matrix = reine Drehung ohne Normänderung:

Hat die Matrix die Form

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} ,$$

dann bewirkt die Vektor-Matrix-Multiplikation keine Streckung, sondern nur eine **Drehung** um den Winkel α . Dieser Fall kommt z. B. in der Mechanik oder Elektrotechnik bei der Drehung von Koordinatensystemen um den Ursprung vor und gestattet die Umrechnung der Koordinaten aus dem ursprünglichen Koordinatensystem in das Neue.

7.2 Vektor-Matrix-Multiplikation zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Das Lösen von – oft linearen – Gleichungssystemen mit mehreren Unbekannten gehört zu den Hauptaufgaben der Ingenieurtechnik, ist aber eigentlich rein mathematischer Natur. Während bei wenigen Unbekannten (im Allgemeinen bis zu 3) eine der 3 „Handwege“

- Additionsverfahren
- Einsetzverfahren
- Gleichsetzverfahren

noch mit vertretbarem Aufwand machbar ist, kommen für eine größere Zahl nur noch die Verfahren der linearen Algebra in Frage. Dabei beschränkt man sich auf das Erstellen der physikalischen Gleichungen und das für die Weiterverarbeitung mit einem Rechenprogramm geeignete Anordnen. Solche Programme stehen in beschränktem Umfang in programmierbaren Taschenrechnern, besser aber mit speziellen Paketen wie MATLAB, Mathematica, Scilab und einigen anderen zur Verfügung.

Am Beispiel von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten lässt sich der Weg erläutern:

$$m_{11} \cdot x + m_{12} \cdot y = b_1$$

$$m_{21} \cdot x + m_{22} \cdot y = b_2$$

Die Komponenten des Vektors $a = [x \ y]^T$ aus 5.4 bilden die Unbekannten, die Koeffizienten m_{11} usw. sind die Elemente der Matrix M , die rechten Seiten werden zum Vektor b zusammengefasst (**Achtung** → Spaltenform → Matrix steht links):

$$a = [x, y]^T, \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad b = [b_1, b_2]^T$$

Das obige Gleichungssystem hat damit die alternative Form

$$M \cdot a = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \cdot x + m_{12} \cdot y \\ m_{21} \cdot x + m_{22} \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Da der Vektor a die beiden Unbekannten enthält, muss das System nach a aufgelöst werden. Man „dividiert“ dazu beide Seiten durch die Matrix M , so, wie man es auch bei einer skalaren Gleichung machen würde:

$$m \cdot a = b \rightarrow \frac{1}{m} \cdot m \cdot a = m^{-1} \cdot m \cdot a = a = \frac{1}{m} \cdot b = m^{-1} \cdot b$$

Das Dividieren geschieht dabei als Multiplizieren mit dem Kehrwert oder dem **inversen Element** m^{-1} . Bei Vektorgleichungen ist dies formal ebenso, man multipliziert beide Seiten mit der inversen Matrix M^{-1} :

$$M^{-1} \cdot M \cdot a = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$ enthält in der Hauptdiagonalen nur die Werte 1, sonst 0 und wird als **Einheitsmatrix** bezeichnet. Die Multiplikation eines Vektors mit der Einheitsmatrix verändert den Vektor also nicht. Man überzeuge sich davon, indem man die Multiplikation durchführt.

Damit ist die Lösung für die beiden unbekanntenen Komponenten x und y des Vektors a durch Division von b mit der Matrix M bzw. durch Multiplikation mit der inversen Matrix M^{-1} gegeben. Die Bezeichnung „Division“ ist bei solchen Vektorgleichungen allerdings nur im übertragenen Sinn zu verstehen, da die Bestimmung der inversen Matrix M^{-1} nach einem aufwändigen Algorithmus erfolgt (den das Rechenprogramm uns aber abnimmt!). Für den Fall der obigen (2 x 2)-Matrix gibt es immerhin einen gerade noch einfachen Weg:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}} \cdot \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}$$

Zur Erinnerung an Kapitel 7, Punkt 1: Ein gemeinsamer skalarer Faktor der Vektor- oder Matrix-Elemente kann aus dem Vektor oder der Matrix ausgeklammert werden. Umgekehrt kann ein skalarer Faktor in die Vektor- oder Matrix-Elemente hinein multipliziert werden.

Bitte selbst ausprobieren, dass $M^{-1} \cdot M = M \cdot M^{-1} = E$ gilt. Der Nenner des skalaren Faktors vor der rechten Matrix ist die **Determinante** der Matrix :

$$\det(M) = m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21} .$$

Diese Determinante kann bei bestimmten Wertekombinationen der m_{11} usw. auch Null werden. Dann spricht man von einer **singulären Matrix**, die sich nicht invertiert lässt (entspricht im skalaren Fall der Division durch Null). Das zugeordnete Gleichungssystem hat in diesem Fall keine eindeutige Lösung. Bei Aufgabenstellungen der Ingenieurtechnik erhält man so etwas, wenn man abhängige physikalische Gleichungen aufstellt. Ein Rechenprogramm wird melden, dass die Matrix singular ist, so dass man die Gleichungen korrigieren muss.

Die vollständige Lösung hat sich damit als

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}} \cdot \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

ergeben.

Die Lösung linearer Gleichungssysteme kann man auch so interpretieren, dass sie sich als **Drehstreckung** des Vektors b mit der inversen Matrix M^{-1} ergibt.

Hinweis: Für den Fall zweier Unbekannter ist der Aufwand für die Vektorlösung sicher unangemessen hoch, hier würde man selbstverständlich immer einen der 3 oben genannten „Handwege“ wähle. Der entscheidende Vorteil liegt aber darin, dass dieses Verfahren formal für lineare Gleichungssysteme beinahe beliebiger Ordnung angewendet werden kann. Dann ist die Aufgabe des Ingenieurs, die physikalischen Gleichungen richtig aufzustellen (was oft schwer genug sein wird), diese in die oben gezeigte Vektor-Matrix-Form zu bringen und die Matrix M sowie den Vektor b in das Programm einzugeben. Dieses errechnet daraufhin den gesuchten Vektor a der Unbekannten (sofern die Matrix nicht singular ist).

... und noch einer: Die Mathematik-Pakete akzeptieren meistens auch die direkte Eingabe der physikalisch-technischen Gleichungen, intern bauen sie daraus die oben angegebene Vektorgleichung auf und lösen sie. Dadurch wird für den „Auftraggeber“ der direkte Bezug gut gewahrt. Bei vielen Unbekannten und dementsprechend vielen Gleichungen erhöht das allerdings den Eingabeaufwand beträchtlich, so dass der zuvor beschriebene Weg im Allgemeinen effektiver sein wird.

Determinanten

Im Kapitel 8 hatten wir für das Beispiel einer (2 x 2)-Matrix eine der Funktionen auf quadratischer Matrizen kennen gelernt, die Determinante $\det(M)$. Ihr Wert gibt als skalare Größe Auskunft über elementare Eigenschaften von M , insbesondere darüber, ob M regulär (= invertierbar) oder singular (= nicht invertierbar) ist. Bei regulären Matrizen ist der Wert der Determinante $\det(M) \neq 0$, bei singulären Matrizen $\det(M) = 0$. Für ein mit M verbundenes lineares Gleichungssystem kann man z. B. durch Berechnung der Determinante also bereits Aussagen zur Lösbarkeit treffen.

Die Berechnung von Determinanten zur quadratischen (n x n)-Matrix $A=M$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

erfolgt über die Vorschrift

$$\det(A) = \sum_{\text{alle Permutationen von } \alpha \beta \gamma \dots \omega} (-1)^k \cdot a_{1\alpha} \cdot a_{2\beta} \cdot a_{3\gamma} \cdot \dots \cdot a_{n\omega}$$

mit $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, ..., $\omega=n$

k: Anzahl der Inversionen = Anzahl aller Vertauschung der Reihenfolge der zweiten Indices einer Permutation. Es ist $(-1)^k$

- „+1“ bei gerader Anzahl der Inversionen
- „-1“ bei ungerader Anzahl der Inversionen

Bei $n=4$ gibt es unter Beibehaltung der natürlichen Reihenfolge der ersten Indices (1,2,3,4) bei den zweiten Indices u. a. folgende Vertauschungen:

- $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$ keine, $k=0$, da 1,2,3,4 die natürliche Reihenfolge darstellt
- $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$ eine (3,2 in 1,3,2,4), $k=1$
- $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{43}$ eine (4,4 in 1,2,4,3), $k=1$
- $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{42}$ drei (3,1 und 4,2 und 3,2 in 3,1,4,2), $k=3$
- usw.

- **Permutationen:** Alle $n!$ (Fakultät) Anordnungen der Zahlen 1, 2, .. n

Z. B. sind bei $n = 4$ die ersten sechs der $4! = 24$ Permutationen

- $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$
- $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{43}$ (eine Inversion)
- $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$ (eine Inversion)
- $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{42}$ (zwei Inversionen)
- $a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{43}$ (zwei Inversionen)
- $a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{42}$ (drei Inversionen)

Die direkte Berechnung von Hand ist nur für Matrizen der Dimensionen (2 x 2) und (3 x 3) zumutbar. Man erhält bei Anwendung obiger Vorschrift:

Für $n=2$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Für $n=3$ (auch als Sarrus-Regel bekannt (sprich Sarrü))

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Man bildet also die Summen der Produkte aller 3 **Hauptdiagonal-Elemente** (von links oben nach rechts unten) und subtrahiert die Summe aller 3 **Nebendiagonal-Elemente** (von rechts oben nach links unten). Etwas leichter lesbar wird das Verfahren, wenn man die ersten beiden Matrixspalten nochmals rechts anfügt, da man dann nicht zyklisch nach links springen muss. Die Erweiterung ist aber nur eine schematische Hilfe, **keine** neue Matrix.:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right]$$

Übung: Man berechne nach der allgemeinen Vorschrift die Determinanten für $n = 2$ und $n = 3$ und vergleiche die Ergebnisse.

Insbesondere ab $n \geq 4$ können einige angenehme Eigenschaften von Determinanten helfen, den Berechnungsaufwand zu verringern:

- Ein Nullelement bewirkt, dass die Summenterme in der Bildungsvorschrift für die Determinante, die dieses Element enthalten, keinen Beitrag liefern. Je mehr Null-Elemente eine Matrix enthält, desto **einfacher** wird also ihre Berechnung. Im obigen Beispiel für $n=3$ z. B. fallen der dritte und sechste Summenterm weg, wenn das Element $a_{32} = 0$ ist.
- Vertauschen von Zeilen oder Spalten verändert den Wert der Determinante nicht.
- Die Determinanten einer Matrix und ihrer Transponierten sind gleich.
- Ein gemeinsamer Faktor in einer Zeile oder Spalte kann vor die Determinante gezogen werden. Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Damit lassen sich eventuell große Zahlen vermeiden.

- Die Addition einer mit einem **beliebigen** Skalar multiplizierten Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) ändert den Wert der Determinante nicht. Wegen dieser Eigenschaft lassen sich immer Nullelemente erzeugen. Ein Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Zeile 2} + (-2) \cdot \text{Zeile 1} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

- Verallgemeinerung von e): Addition der Linearkombination beliebiger Zeilen zu einer anderen Zeile ändert den Wert nicht.
- Jede Determinante lässt sich nach den Elementen einer Zeile (oder Spalte) „entwickeln“. Dabei entstehen Unterdeterminanten der Ordnung $(n-1)$. Man erhält sie, wenn man aus der Determinante diejenige Zeile und Spalte streicht, in der das Element steht, nach dem entwickelt werden soll und die verbleibenden Elemente als Unterdeterminante anordnet. Beispiel:

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} \textcircled{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ . Die Unterdeterminante zu } a_{11} \text{ ist } \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \textcircled{a_{21}} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ . Die Unterdeterminante zu } a_{21} \text{ ist } \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ usw.} \end{array}$$

Die **Adjunkte** A_{ij} zum Element a_{ij} ist die dazugehörige Unterdeterminante, versehen mit dem Vorzeichen

- „+“ bei **gerader** Summe der Indices $i+j$ in a_{ij}

- „-“, bei **ungerader** Summe der Indices $i+j$ in a_{ij}

Die Vorzeichen wechseln also wie die Felder beim **Schachbrett**.

Die Determinante setzt sich bei Entwicklung nach den Elementen der ersten Spalte aus 3 Termen zusammen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Hierbei ist das negative Vorzeichen beim zweiten Term zu beachten.

Die beschriebene Entwicklung ist für beliebige Zeilen oder Spalten möglich! Der **Vorteil** liegt in der Kombination mit einer vorherigen Erzeugung von Nullelementen. Hat man z. B. die beiden Elemente a_{21} und a_{31} gemäß Punkt d) zu Nullelementen gemacht, lässt sich die Determinante aus

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22}' & a_{23}' \\ a_{32}' & a_{33}' \end{vmatrix} \text{ berechnen.}$$

Mit dem obigen Zahlenbeispiel sieht das so aus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 3 \text{ (Probe machen!)}$$

Übung: Entwickeln Sie die vorstehende Determinante nach den Elementen der ersten **Zeile**.

Determinanten werden auch zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix benötigt, siehe Kapitel 16. Diese Angaben ermöglichen z. B. Aussagen über die in der Elektrotechnik und Technischen Mechanik so bedeutenden Schwingungsformen.

7.3 Der Gauß'sche Algorithmus als Erweiterung des Additionsverfahrens

Zur Lösung umfangreicher linearer Gleichungssystem kann auch der Gauß'sche Algorithmus verwendet werden (Algorithmus = systematische Rechenvorschrift für Hand- und Rechnerbearbeitung). Er baut auf dem Additionsverfahren auf, am folgenden Beispiel eines Gleichungssystems aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten x , y und z lässt sich der Gedanke erläutern.

Schritt 1: Ordnen der Gleichungen so, dass alle Unbekannten auf der linken Seite und untereinander stehen, alle Terme ohne Unbekannten auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 2 \cdot x - 3 \cdot y + 3 \cdot z = -5 \\ \text{(II)} \quad & 6 \cdot x + y - 2 \cdot z = 14 \\ \text{(III)} \quad & -x - 4 \cdot y + 2 \cdot z = -16 \end{aligned}$$

Schritt 2: Gleichung (I) bleibt unverändert, zu den Gleichungen (II) und (III) werden geeignete Vielfache von (I) addiert (= Additionsverfahren), so dass in (II) und (III) die Terme mit x herausfallen, also

$$\begin{aligned} & \text{(II)+(I) \cdot (-3)} \quad \text{und} \quad \text{(III)+(I) \cdot 0.5} : \\ \text{(I)} \quad & 2 \cdot x - 3 \cdot y + 3 \cdot z = -5 \\ \text{(IV)} \quad & 0 \cdot x + 10 \cdot y - 11 \cdot z = 29 \\ \text{(V)} \quad & 0 \cdot x - 5.5 \cdot y + 3.5 \cdot z = -18.5 \end{aligned}$$

Schritt 3: Die Gleichungen (I) und (IV) bleiben unverändert, zur Gleichung (V) wird ein geeignetes Vielfache von (IV) addiert, so dass in (V) der Term mit y herausfällt, also

$$\begin{aligned} & (V) + (IV) \cdot (0.55) : \\ (I) \quad & 2 \cdot x - 3 \cdot y + 3 \cdot z = -5 \\ (IV) \quad & 0 \cdot x + 10 \cdot y - 11 \cdot z = 29 \\ (VI) \quad & 0 \cdot x - 0 \cdot y - 2.55 \cdot z = -2.55 \end{aligned}$$

Schritt 4: Gleichung (VI) enthält nun nur noch die Unbekannte z und kann nach dieser aufgelöst werden:

$$z = 1$$

Nach Einsetzen von $z = 1$ in Gleichung (IV) lässt sich diese nach y auflösen:

$$y = 4$$

Schließlich werden z und y in (I) eingesetzt und man erhält $x = 2$.

Das Verfahren ist für jede Zahl von n linearen Gleichungen und n Unbekannten anwendbar. Es geht also darum, durch **Elementar-Umformungen** (Additionen) schrittweise die Unbekannten so aus den Gleichungen zu eliminieren, dass eine **rechte obere Dreiecksanordnung** in den Unbekannten entsteht. Dann kann das System rückwärts aufgelöst werden.

Hinweis: Nicht immer führt das Verfahren auf eine letzte Gleichung mit nur einer Unbekannten. Dann ist das **Gleichungssystem unterbestimmt**, es gibt weniger unabhängige Gleichungen als Unbekannte und das System lässt sich nicht auflösen. Dies kann man im Allgemeinen aber vorher nicht sehen.

Insbesondere in der Messtechnik liegt oft der Fall vor, dass mehr Gleichungen vorhanden sind als Unbekannte, was hier sogar erwünscht ist, um den Einfluss zufälliger Messfehler verringern zu können. Solche Gleichungssysteme nennt man **überbestimmt**, durch besondere Maßnahmen lassen sie sich lösen. Dies gehört zum Gebiet der Fehlerrechnung und wird später ausführlicher betrachtet.

Rang von rechteckigen oder quadratischen Matrizen

Der Rang einer (m x n)-Matrix ist die Anzahl ihrer linear unabhängigen Zeilen (oder Spalten). Wenn man den im vorigen Kapitel 10 beschriebenen Gauß'schen Algorithmus auf eine beliebige rechteckige (m x n)-Matrix anwendet (\rightarrow elementare Zeilenoperationen) und sich dabei Nullzeilen ergeben, so sind diese linear von anderen Zeilen abhängig. Es gilt:

- Falls A keine Nullmatrix, dann $\text{Rang}(A) \geq 1$
- Für $m < n$ ist $\text{Rang}(A) \leq m$ und $\text{Rang}(A') \leq m$
- Fall A eine quadratisch (n x n)-Matrix und $\det(A) \neq 0$, also A regulär, dann ist $\text{Rang}(A) = n$, andernfalls $\text{Rang}(A) < n$.

7.4 Spaltenvektorform und Zeilenvektorform

Die bisher verwendeten Vektoren wurden in der Spaltenform ($= (m \times 1)$ - Matrix) geschrieben, die Elemente (= Komponenten) stehen dabei in einer Spalte. Genauso kann man die Elemente aber in Zeilenform ($= (1 \times n)$ - Matrix) anordnen:

$$a = [a_x, a_y, a_z] \text{ ist gleichwertig zu } a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}.$$

Bei der Vektor-Matrix-Multiplikation ist aber zu beachten, dass

- bei Zeilenvektordarstellung eine Matrizenmultiplikation von rechts

- bei Spaltenvektorform jedoch von links erfolgen muss.

Bei der Vektor-Matrizen-Multiplikation ist also das bei skalaren Multiplikationen gültige **Kommutativgesetz** (= Vertauschbarkeitsgesetz der Faktoren) **nicht** anwendbar.

Damit die Zuordnung der Vektor- und Matrizenelemente nicht verändert wird, müssen in der Matrix außerdem die Zeilen mit den Spalten vertauscht werden. Dieser Vorgang heißt **Transposition** der Matrix, aus

$$M \text{ wird } M^T .$$

Die Matrix M^T hat die Bezeichnung „transponierte Matrix“ oder Transponierte der Matrix M .

Zum Beispiel wird aus

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ durch Transponieren } M = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -3 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Damit gilt, dass

$$[a_x, a_y, a_z] \cdot M \text{ gleichbedeutend zu } M^T \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \text{ ist.}$$

Aber **Vorsicht**: Obwohl beide Darstellungen alternativ verwendet werden können, empfiehlt es sich dringend, innerhalb eines Rechenprojektes bei der einmal gewählten Darstellung zu bleiben. Es besteht im allgemeinen keine Notwendigkeit, zu wechseln. Will man dies aus „optischen“ Gründen trotzdem tun, müssen die beteiligten Matrizen unbedingt transponiert werden.

Sonderfall: Bei symmetrische Matrizen (= die Elemente oberhalb und unterhalb der Hauptdiagonalen sind symmetrisch hierzu angeordnet) ist die transponierte Matrix gleich der ursprünglichen Matrix $M = M^T$ (warum?).

7.5 Invertieren einer quadratischen Matrix mit dem Gauß-Jordan-Verfahren

Durch Fortführung des Gauß'schen Algorithmus lässt sich auch die Invertierung jeder regulären (= nicht singulären) quadratischen Matrix erreichen. Man schreibt dazu links die Matrix M hin und rechts daneben die Einheitsmatrix I gleicher Dimension. Dann wird durch elementare Zeilenoperationen wie beim Gauß'schen Algorithmus unter Einbeziehung der rechten Seite links zunächst eine rechte obere Dreiecksanordnung erzeugt, danach links noch eine reine Diagonalmatrix mit 1-Elementen in der Hauptdiagonalen. Parallel dazu ist „automatisch“ aus der rechten Einheitsmatrix die inverse M^{-1} entstanden. Als Beispiel dient das Gleichungssystem aus Kapitel 7. Da diesem Gleichungssystem eine Vektordarstellung in Spaltenform zugrunde liegt, wird die Matrix M von links an den Vektor x der Unbekannten x, y, z

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ heran multipliziert. Die Matrix } M \text{ ist also}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -3 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ und mit der Einheitsmatrix } E \text{ entsteht folgendes Schema:}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \cdot$$

Nach den genannten Umformungen erhält man:

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -7 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 23 & -11 & -20 \end{array} \right| \cdot \frac{1}{51}, \text{ die inverse Matrix ist}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{51} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 10 & -7 & -22 \\ 23 & -11 & -20 \end{bmatrix} \cdot$$

Der Faktor $\frac{1}{51}$ bedeutet, dass die Elemente in den 3 rechten Spalten hiermit zu multiplizieren sind, er wurde als gemeinsamer Faktor nur der Übersichtlichkeit wegen herausgezogen.

7.6 Sonderfall: Inverse von orthogonalen Matrizen (= Drehmatrizen)

Punkt 5 in Kapitel 7 verwies auf spezielle Matrizen, die einen Vektor im Koordinatensystem zwar um einen Winkel α drehen, den Betrag aber unverändert lassen. Sie heißen **orthogonale Matrizen** und haben die Determinante $\det(M)=1$ (**aber:** Eine beliebige Matrix M mit $\det(M)=1$ ist nicht automatisch orthogonal).

Die Inversen zu orthogonalen Matrizen M lassen sich besonders einfach bestimmen: Es sind die dazu transponierten Matrizen. Z. B. ist für die Drehmatrix

$$M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ die Inverse } M^{-1} = M^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot$$

Da Drehmatrizen in der Ingenieurtechnik bei der Drehung von Koordinatensystemen eingesetzt werden, kann man Rückdrehungen um den gleichen Winkel α einfach durch Multiplikation mit der transponierten Drehmatrix durchführen.

7.7 Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen (LGS)

Bei LGS mit $A \cdot x = b$ lassen sich **5 Fälle** unterscheiden, die hier anhand von Beispielen dargestellt sind:

1. A regulär (\rightarrow invertierbar) und LGS inhomogen, also $b \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Das LGS hat stets eine **eindeutige** Lösung $x = A^{-1} \cdot b$ (in der Technik der häufigste Fall).

Beispiel:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. A regulär (\rightarrow invertierbar) und LGS homogen, also $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

Das LGS hat nur die Trivial-Lösung $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, da es sonst mindestens eine widersprüchliche Gleichung enthält (bei der Aufstellung eines solchen LGS hat man wahrscheinlich einen Fehler gemacht).

Beispiel:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. A singular (\rightarrow nicht invertierbar), LGS inhomogen, also $b \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$: Hier gibt es zwei Fälle:

- Die aus A und b gebildete rechteckige ($n \times (n+1)$)-Matrix $C = [A|b]$ hat $\text{Rang}(C) = r = n$. Dann ist das LGS wegen widersprüchlicher Gleichungen unlösbar (bei der Aufstellung eines solchen LGS hat man wahrscheinlich einen Fehler gemacht).

Beispiel:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{Rang}(C) = 2 = n$$

\rightarrow keine Lösung da die beiden Gleichungen widersprüchlich sind.

- Die aus A und b gebildete rechteckige ($n \times (n+1)$)-Matrix $C = [A|b]$ hat $\text{Rang}(C) = r < n$. Dann sind $(n-r)$ Gleichungen linear abhängig. Es könnten in diesem Fall r Unbekannte x_i mit beliebigen Werten k_1, k_2, \dots, k_r als konstante Werte festgelegt werden, es verblieben $(n-r)$ Unbekannte.

Es gäbe unendliche viele Lösungen. Die Ordnung des LGS würde sich um die Anzahl r verringern, das verbleibende LGS würde gemäß Fall 1) gelöst. Das ist aber im Allgemeinen unnötig, da man bei der Aufstellung des LGS eine überflüssige Gleichung einbezogen hatte.

Beispiel:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -9 \end{bmatrix}, \quad \text{Rang}(C) = 1 < n$$

Lösbar, wenn z. B. $x_2 = k, k \in \mathbb{R}$ gesetzt wird. Dann bleibt nur noch eine Gleichung in x_1 übrig:

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot k = 3 \rightarrow x_1 = 3 - k. \text{ Der Lösungsvektor ist } x = \begin{bmatrix} 3 - k \\ k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

4. A singular (\rightarrow nicht invertierbar) und LGS homogen, also $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

Dann ist $\text{Rang}(A) = r < n$, das LGS enthält r linear abhängige Zeilen. Man wählt aus den Unbekannten willkürlich r aus und setzt sie auf konstante Werte $x_k = k_1, x_r = k_2, \dots$. Nach Einfügen in das LGS bleiben $(n-r)$ lineare unabhängige Gleichungen übrig, die sich gemäß Fall 1 lösen lassen. Es gibt unendlich viele Lösungen.

Beispiel:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rang}(A) = 1 < 2 \rightarrow \text{z. B. } x_1 = k \rightarrow x_2 = -x_1 = -k.$$

Lösungsvektor: $x = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$

7.8 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wie in Kapitel 7.8 erwähnt, kann man die Multiplikation einer Matrix A mit einem Spaltenvektor x als Drehstreckung von x auffassen. Durch $A \cdot x = b$ wird der Vektor x

- in seiner Länge (=Norm) um den Faktor $\frac{\|b\|}{\|x\|}$ gestreckt,
- um einen Winkel ϕ gedreht.

Als Ergebnis entsteht der Vektor b . Ist b bekannt und x unbekannt, so bewirkt die Lösung $x = A^{-1} \cdot b$, dass

- der Vektor b um den inversen Faktor $\frac{\|x\|}{\|b\|}$ gestaucht,
- um den Winkel $-\phi$ zurück gedreht wird.

Zu jeder regulären ($n \times n$)-Matrix A gibt es spezielle Vektoren x^* , welche durch die Multiplikation mit A nicht gedreht, sondern nur um einen Faktor λ gestreckt werden. Da sich der Abbildungsvektor $b^* = A \cdot x^*$ auf derselben Wirkungslinie wie x^* befindet, nennt man x^* einen Eigenvektor der Abbildung mit A und den Faktor λ einen Eigenwert der Matrix A . Für einen Eigenvektor x^* gilt also:

$$A \cdot x^* = \lambda \cdot x^* = \lambda \cdot E \cdot x^*$$

mit E als Einheitsmatrix der gleichen Dimension ($n \times n$) wie von A .

Die Gleichung lässt sich durch Ausklammern von x^* in

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot x^* = 0$$

umformen. Die Determinante der Matrix $(A - \lambda \cdot E)$ liefert ein Polynom $p(\lambda)$ in der Variablen λ . Die Nullstellen dieses Polynoms sind die Eigenwerte von A .

Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ wird}$$

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ 1 & (-3-\lambda) \end{bmatrix} \right)$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda) \cdot (-3-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0$$

Die beiden Eigenwerte sind $\lambda_1 = -1 + \sqrt{5}$ und $\lambda_2 = -1 - \sqrt{5}$.

Die beiden zugehörigen Eigenvektoren $x^{*(1)}$ und $x^{*(2)}$ bestimmt man aus den beiden homogenen LGS

$$(A - \lambda_1 \cdot E) \cdot x^{*(1)} = 0 \text{ und } (A - \lambda_2 \cdot E) \cdot x^{*(2)} = 0$$

mit den singulären Matrizen

$$(A - \lambda_1 \cdot E) \text{ und } (A - \lambda_2 \cdot E) \text{ (Probe machen !)}$$

Die LGS sind gemäß Kapitel 7, Fall 4, lösbar. Für $\lambda_1 = -1 + \sqrt{5}$ z. B. wird das LGS

$$\begin{bmatrix} (1 - (-1 + \sqrt{5})) & 1 \\ 1 & (-3 - (-1 + \sqrt{5})) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{*(1)} \\ x_2^{*(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Man setzt z. B. $x_1^{*(1)} = k$ und erhält aus der ersten Zeile

$$(1 - (-1 + \sqrt{5})) \cdot k + 1 \cdot x_2^{*(1)} = 0 \rightarrow x_2^{*(1)} = -k \cdot (2 + \sqrt{5})$$

Der Eigenvektor zu $\lambda_1 = -1 + \sqrt{5}$ ist damit

$$\begin{bmatrix} x_1^{*(1)} \\ x_2^{*(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -k \cdot (2 + \sqrt{5}) \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -(2 + \sqrt{5}) \end{bmatrix} .$$

Die Probe muss

$A \cdot x^{*(1)} = \lambda_1 \cdot x^{*(1)}$ ergeben:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -(2 + \sqrt{5}) \end{bmatrix} &= k \cdot \begin{bmatrix} 1 + (-(2 + \sqrt{5})) \\ (1 - 3 \cdot (-(2 + \sqrt{5}))) \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{5} \\ 7 - 3\sqrt{5} \end{bmatrix} \\ &= k \cdot (-1 + \sqrt{5}) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -(2 + \sqrt{5}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{also ok}).$$

Entsprechend wird für den zweiten Eigenvektor verfahren (bitte selbst durchführen).

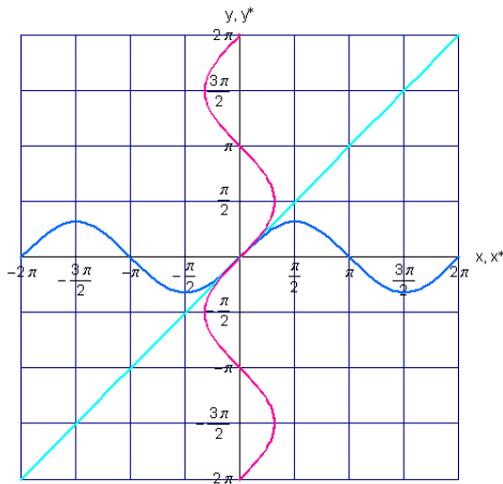
Ergebnis:

$$\begin{bmatrix} x_1^{*(2)} \\ x_2^{*(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -k \cdot (2 - \sqrt{5}) \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -(2 - \sqrt{5}) \end{bmatrix} .$$

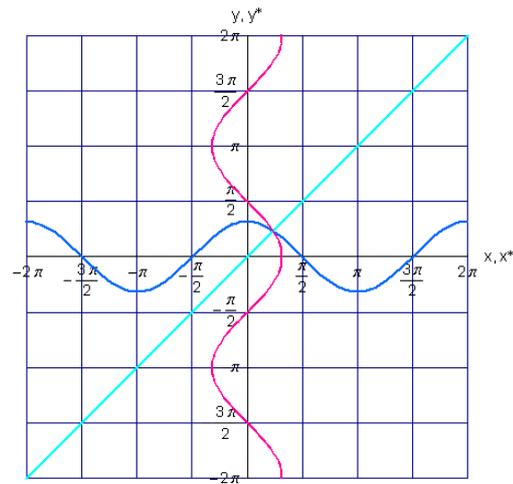
8 Einige weitere Funktionen und deren Umkehrfunktionen, Beispiel arcsin(x) und arcos(x)

Funktionen ordnen einer **unabhängigen Variablen** x den Wert $y = f(x)$ einer **abhängigen Variablen** zu. Für häufig gebrauchte Funktionen wie die Winkel-, Exponential- und logarithmischen Funktionen gibt es in Formelsammlungen Wertetabellen oder bei Taschenrechner über Funktionstasten aufrufbare Werte. Zu vielen Funktionen sind außerdem ihre **Umkehrfunktionen** definiert, mit denen man aus dem bekannten Wert der abhängigen Variablen $y = f(x)$ die zugehörige unabhängige Variable x bestimmen kann.

Die Umkehrfunktionen lassen sich veranschaulichen, wenn man eine grafisch gegebene Funktion an der **Winkelhalbierenden** des Koordinatensystems spiegelt (gleiche Skalierung von x - und y -Achse ist angebracht). Beispiele:



$$y = \sin(x), \quad x = \arcsin(y) \quad \text{oder} \quad y^* = \arcsin(x^*)$$



$$y = \cos(x), \quad x = \arccos(y) \quad \text{oder} \quad y^* = \arccos(x^*)$$

Mit Hilfe dieser Definitionen lassen sich für beliebige, auch **nichtelementare** Funktionen ihre Umkehrfunktionen bestimmen.

Eine nützliche Eigenschaft der Funktion $f(x)$ und deren Umkehrfunktion $f_U(x)$ ist es, dass die mit ihrer Umkehrfunktion aufgerufene Funktion das Argument x ergibt:

$$f[f_U(x)] = x \quad \text{und} \quad f_U[f(x)] = x$$

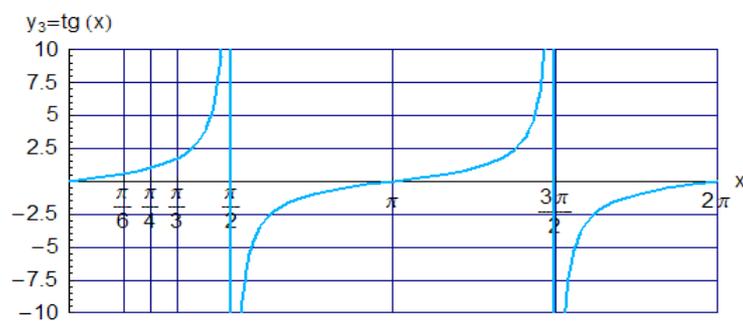
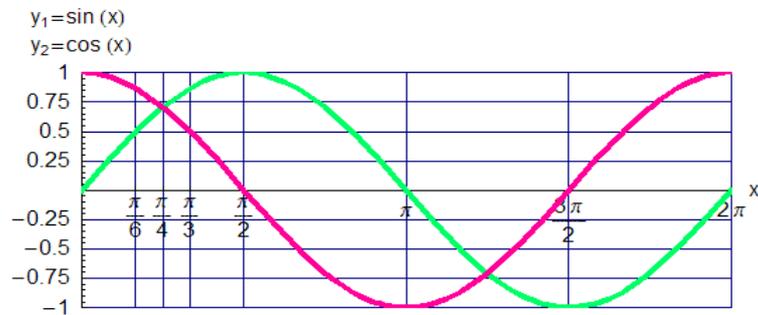
Beispiele:

$$e^{(\ln(x))} = x \quad \ln(e^x) = x$$

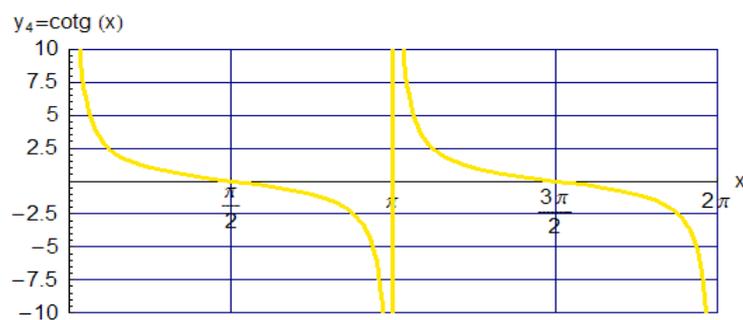
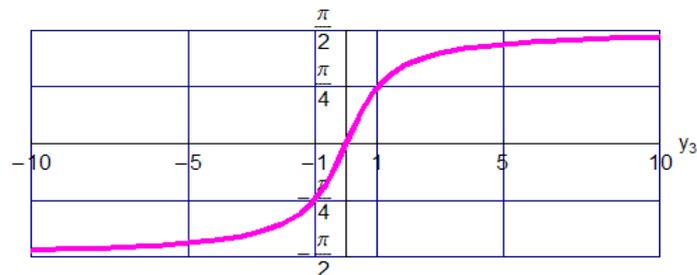
$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \sin(\arcsin(x)) = x$$

8.1 Trigonometrische Funktionen II und Diagramme

8.1.1 Weitere trigon. Funktionen und Umkehrfunktionen $\arctan(x)$ und $\operatorname{arccot}(x)$



$x = \operatorname{arctg}(y_3)$, Umkehrfunktion zu $\operatorname{tg}(x)$



8.1.2 Umrechnung der Winkel von α (Grad) in x (Bogenmaß)

$$\alpha(\text{Grad}) = x(\text{Bogenmaß}) \cdot \frac{180}{\pi}, \quad x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$$

8.1.3 Einige trigonometrische Umformungen

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \quad \sin(\alpha) = \sqrt{1 - [\cos(\alpha)]^2}, \quad \sin(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + [\tan(\alpha)]^2}}$$

$$\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha), \quad \cos(2 \cdot \alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta), \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta), \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

8.1.4 Oft gebrauchte Werte

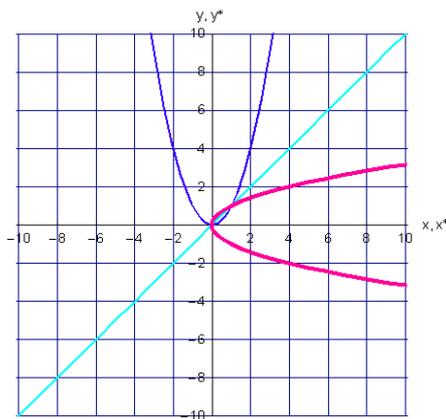
$$\sin(45^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos(45^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos(60^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

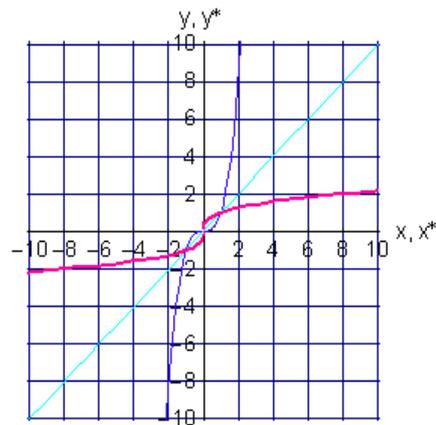
$$\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg}(45^\circ) = 1, \quad \operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$$

8.2 Polynomiale Funktionen

Die unabhängige Variable ist mit konstanten Exponenten versehen. Die Umkehrfunktionen sind die Wurzelfunktionen. Die Quadratwurzelfunktion ist für negative Radikanden x im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert, hat aber für positive Radikanden x zwei Äste. Beispiele:



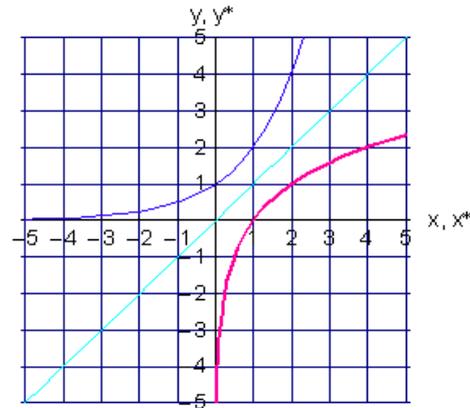
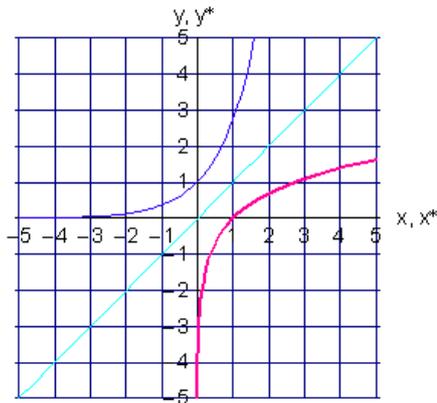
$$y = x^2, \quad x = \pm \sqrt{y} \quad y^* = \pm \sqrt{x^*}$$



$$y = x^3, \quad x = \sqrt[3]{y} \quad y^* = \sqrt[3]{x^*}$$

8.3 Exponentialfunktionen

Die unabhängige Variable tritt als Exponent zu einer konstanten Zahl auf. Die Umkehrfunktionen sind die logarithmischen Funktionen. Beispiele:



$$y=e^x, \quad x=\ln(y), \quad y^*=\ln(x^*)$$

$$y=2^x, \quad x=\log_2(y), \quad y^*=\log_2(x^*)$$

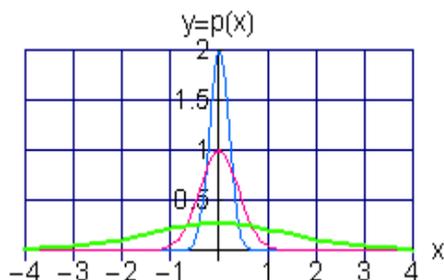
Exponentialfunktionen beschreiben z. B. das Spannungs-Strom-Verhalten von Halbleiterdioden in Durchlassrichtung, den zeitlichen Übergang einer Kondensatorentladung oder der Magnetfeldenergie einer Spule und vieles mehr.

8.4 Gauß'sche Normalverteilung

Von den außerordentlich vielen Funktionen, die in der Mathematik definiert sind, werden für die Grundlagen der Ingenieurtechnik nur wenige gebraucht. Hierzu gehört u. a. die Normalverteilungsdichte-Funktion $p(x)$, kurz auch Normalverteilung genannt. Sie gibt an, welchen Anteil ein bestimmter Wert x einer normalverteilten Zufallsvariablen an allen Werten hat. Der Verlauf von $p(x)$ wird durch zwei Kenngrößen bestimmt:

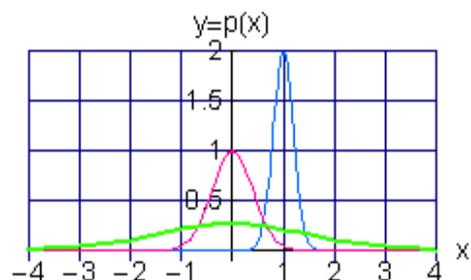
- Der Mittelwert \bar{x} aller Werte
- Die Streuung σ (= sigma)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$



$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0,$$

$$\sigma_1 = 0.2 \text{ (blau)}, \quad \sigma_2 = 0.4 \text{ (rot)}, \quad \sigma_3 = 1.5 \text{ (grün)}$$



$$\bar{x}_1 = 1,$$

$$\sigma_1 = 0.2 \text{ (blau)}$$

Die Diagramme zeigen, dass bei großen Streuungen der Anteil großer Werte der Zufallsvariablen wächst. Bei elektrischen Zufallssignalen mit Mittelwert 0 ($\bar{x}=0$) = **Rauschen** mit Mittelwert 0) stellt das Quadrat der Streuung als σ^2 ein Maß für die elektrische Leistung dieses Rausch- oder

Störsignals dar (siehe Angewandte Informatik, Fehlerkorrektur).

8.5 Polynomfunktionen

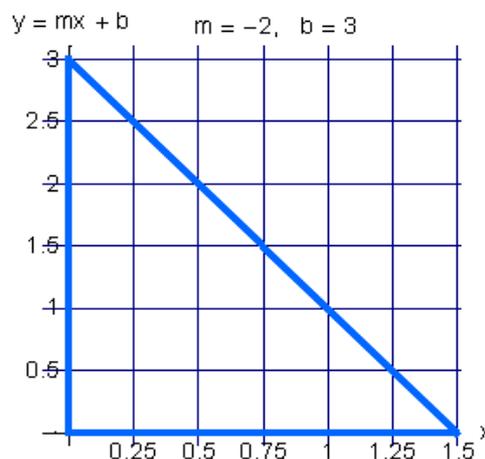
Polynomfunktionen setzen sich aus Summen von polynomialen Funktionen (s. Kapitel 8.2) mit verschiedenen Exponenten zusammen. Sie dienen in der Ingenieurtechnik z. B. zur Beschreibung

- der Konturen von Konstruktionselementen
- Biegelinien belasteter Balken
- näherungsweise Ersatz für gemessene Zusammenhänge (z. B. Weg-Zeit-Diagramme).

Im einfachsten Fall liegt eine Gerade vor. Sie wird durch die Polynomfunktion ersten Grades

$$y = f(x) = m \cdot x + b$$

gegeben und hat die beiden Parameter m und b . „ m “ bezeichnet die Steigung, b den Abschnitt auf der y -Achse für den Abszissenwert $x = 0$. Ist z. B. die Kontur eines ebenen Bauteils (eine Metallplatte) als rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b gegeben, so lässt sich die Hypotenuse als Gerade $y = f(x)$ beschreiben, wenn man die Katheten in die Achsen legt:



Dies ist etwa in der Technischen Mechanik bei der Bestimmung des Flächenschwerpunktes dreieckförmiger Bauelemente oder bei der Ermittlung der Wirkungslinie dreieckförmiger Linienlasten nützlich. Die Steigung m berechnet sich hier als negativer Quotient der beiden Achsabschnitte

$$m = -\frac{y(x=0)}{x(y=0)} = -\frac{b}{x(y=0)} = -\frac{3}{1.5} = -2$$

Oder: Ist eine Kontur oder ein graphisch gegebener Verlauf (Messkurve) zwar gegeben, die Funktion aber unbekannt, so lässt sie sich näherungsweise durch eine Folge kurzer Geradenstücke beschreiben und somit aus dreieckförmigen Anteilen mit ermittelbaren Geradenabschnitten als Polygonzug zusammensetzen. Mit diesen Näherungen kann nun die weitere Berechnung (Schwerpunkte und ähnliches) fort gesetzt werden. Der Anwendungsbereich selbst dieser einfachen Polynomfunktion bietet also bereits eine beachtliche Vielseitigkeit.

Je mehr Punkte bekannt sind, desto höheren Grades kann auch das hierzu festzulegende Polynom sein. Bei 3 Punktepaaren (x_1/y_1) , (x_2/y_2) , (x_3/y_3) z. B. lassen sich die 3 Parameter a , b und c einer quadratischen Parabel

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

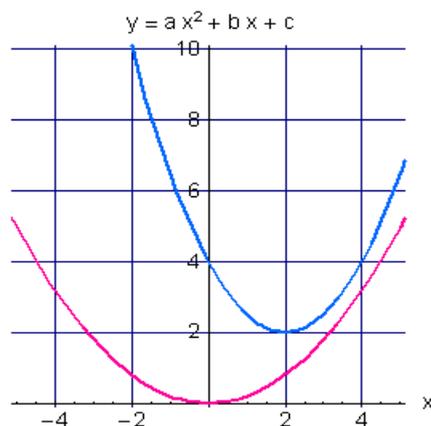
bestimmen. Hierzu muss ein lineares System von drei Gleichungen in den drei Unbekannten a , b , c gelöst werden:

$$y_1 = a \cdot x_1^2 + b x_1 + c$$

$$y_2 = a \cdot x_2^2 + b x_2 + c$$

$$y_3 = a \cdot x_3^2 + b x_3 + c .$$

Für die blaue Parabel etwa liest man die Punktepaare $(-2/10)$, $(0/4)$ und $(2/2)$ ab und erhält $a=0.5$, $b=-2$, $c=4$.



Das Diagramm zeigt auch die zu $y=f(x)=a \cdot x^2+b \cdot x+c$ gleichwertige **Scheitelpunkt-**Darstellung mit den Scheitelpunkt-Koordinaten x_s, y_s :

$$(y - y_s) = a \cdot (x - x_s)^2 .$$

Die blaue Parabel hat z. B. die Scheitelpunkt-Koordinaten $x_s = 2, y_s = 2$. Mit der Öffnung $a=0.5$ erhält man durch Einsetzen, Auserten und Koeffizientenvergleich

$$b = -2 \cdot a \cdot x_s = -2, \quad c = y_s + a \cdot x_s^2 = 4$$

$$y = f(x) = 0.5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4 .$$

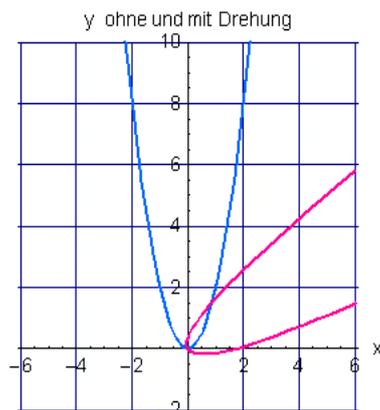
Eine allgemeine Parabel entsteht durch Drehen der Scheitelachse um den Winkel α . Dazu dient die bereits in Punkt 5 des Kapitels 5 angesprochene Drehmatrix, die eine orthogonale Transformation aller Parabelpunkte um den Winkel bewirkt. Die Parabelfunktion geht dabei mit den beiden Transformationsgleichungen

$$x = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha$$

$$y = x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha$$

in den Ausdruck

$$x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha = a \cdot (x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha)^2 + b \cdot (x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha) + c \quad \text{über.}$$



Für $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ erhält man die im Diagramm gezeigte **blaue** Parabel mit dem Scheitelpunkt im Ursprung. Die Drehung um -60° dreht die x - y -Achsen um diesen Winkel in die neuen Achsen x' , y' . Im alten x - y -Koordinatensystem erscheint daher die Parabel (**rot**) ebenfalls um -60° gedreht (negativer Winkel = mathematisch im Uhrzeigersinn).

Die Parabelfunktion in x' - y' -Koordinaten lässt sich übrigens **nicht** nach y' auflösen (man versuche es ...), sie stellt daher eine **implizite Funktion** in den Variablen x' und y' dar.

Nochmals zurück zu den Polynomfunktionen als Näherungsfunktionen insgesamt: Im Allgemeinen ist es nicht angebracht, den Grad des Polynoms zu hoch zu wählen, da sich unerwünschte Effekte einstellen können, die das Polynom zwar in den Punktepaaren exakt wiedergeben, dazwischen aber stark vom erwarteten Verlauf abweichen. Dies stellt ein prinzipielles Problem der **Interpolation** dar, wo man gegebene diskrete Punktepaare durch kontinuierliche Funktionen beschreiben will.

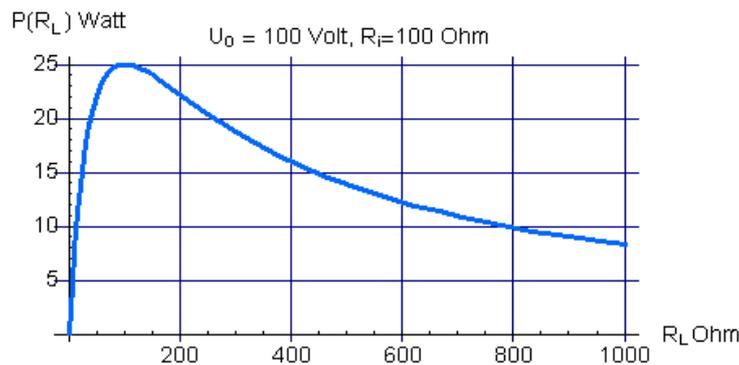
Mit diesen **Polynomfunktionen** kann man in verschiedenen Richtungen weiterarbeiten. Z. B. interessieren oft die Nullstellen, die Steigungen in bestimmten Punkten und die Extremwerte (Maximal- und/oder Minimalwerte).

8.6 Gebrochene Funktionen

Bei der Beschreibung physikalisch technischer Zusammenhänge ergeben sich häufig gebrochene Funktionen, bei denen eine Funktion im Zähler, eine andere im Nenner eines Bruches steht. Zähler- und Nennerfunktionen können dabei Polynomfunktionen oder andere sein. Z. B. hängt die Leistungsabgabe P einer Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i in folgender Weise vom angeschlossenen Lastwiderstand R_L ab (Anlasser an Autobatterie):

$$P_{R_L} = P(R_L) = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} \cdot U_0^2 \quad .$$

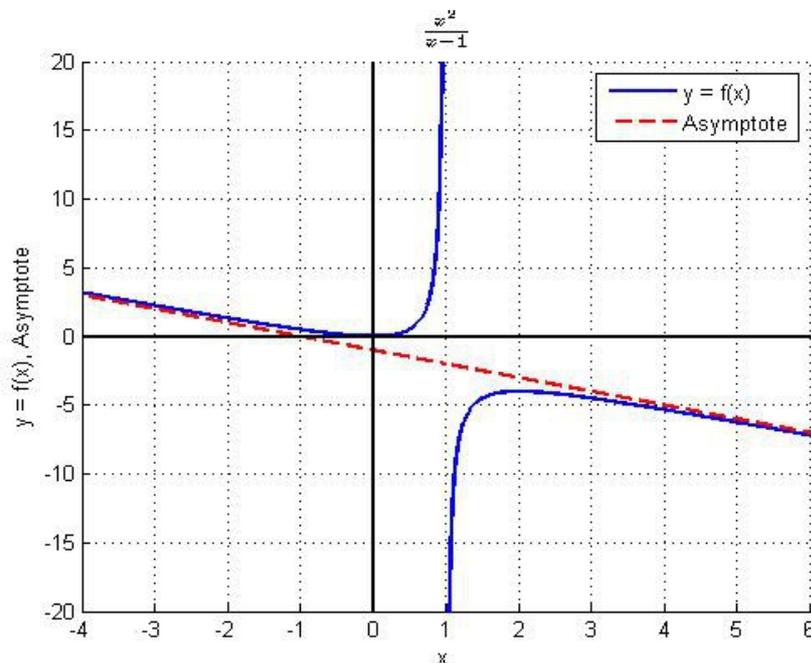
Der Graph hat folgenden Verlauf, wobei der Lastwiderstand R_L den Bereich vom Wert 0 (Kurzschluss) bis gegen ∞ (Leerlauf) durchmisst:



Technisch interessiert hier u. a. der Maximalwert der am Lastwiderstand abgebbaren elektrischen Leistung. Später wird gezeigt, dass dieser über den funktionalen Zusammenhang bei $R_L = R_i = 100$ Ohm liegt, wie aus dem Diagramm auch zu sehen ist.

Bei anderen funktionalen Zusammenhängen sind weitere und andere Besonderheiten des Funktionsverlaufs im Blickpunkt. So können Nullstellen, Extremwerte (s. o.), Unstetigkeits- oder Unbestimmtheitsstellen und Asymptoten interessant sein. Ist der Verlauf durch eine geschlossene Funktion angegebbar, lassen sich hierzu in den meisten Fällen mathematisch gesicherte Antworten geben. Das folgende Beispiel zeigt den Verlauf der Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^2}{1-x} :$$



Als Besonderheiten weist er auf:

- Bei $x = 1$ gibt es eine senkrechte Asymptote. Nähert man sich von links an $x = 1$, so kommt man von positiven Funktionswerten, die immer mehr gegen $+\infty$ streben. Nähert man sich dagegen von rechts an $x = 1$, so kommt man von negativen Funktionswerten, die sich immer mehr gegen $-\infty$ streben.
- Bei $x = 0$ gibt es eine Nullstelle, $f(0) = 0$.
- Für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$ strebt die Funktion gegen $f_{\text{asympt}} = -x - 1$, also gegen die

negative, rot eingezeichnete Winkelhalbierende (ohne sie je zu erreichen) . Sie ist also ebenfalls eine Asymptote. Diese ergibt sich, wenn man den Grenzwert (= limes, siehe auch Limes = römischer Grenzwall, westlich Aschaffenburg und nördlich Frankfurt) der Funktion y für große x -Werte bildet, nachdem man den nicht-gebrochenen Anteil durch Polynomdivision herausgerechnet hat:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(1-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - 1 + \frac{1}{(1-x)} \right) = -x - 1$$

- Es gibt zwei Extremwerte, ein Minimum bei $x = 0$, ein Maximum bei ca. $x = 2$.

8.7 Kombinatorische Funktionen (Komplexionen)

Um die Anzahl aller Möglichkeiten zur Anordnung von Objekten auf einer vorgegebenen Zahl von Plätzen zu ermitteln, sind die kombinatorischen Funktionen hilfreich. Sie spielen vor allem bei statistischen Analysen eine wesentliche Rolle, weil sie allgemeine Aussagen zum zufälligen Verhalten einer Menge von Objekten gestatten, wobei die Anzahl der Objekte beliebig groß sein kann. Man erspart sich so das zwar mögliche, aber wegen der großen Anzahl in endlicher Zeit praktisch undurchführbare, systematische Durchspielen aller Anordnungen. Es gibt drei hauptsächliche Fragestellungen:

- **Permutation:** Wie oft kann man n verschiedene Objekte unterschiedlich **bei** Beachtung der Reihenfolge auf n Plätzen anordnen? Antwort:

$$x = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(n-1)) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \quad (\mathbf{n\text{-Fakultät}})$$

Beispiel: Wie oft kann man die Zahlenkugeln 1 bis 49 beim Lotto unterschiedlich auf 49 Plätze verteilen? Antwort: $x = 49! = 608281864034267560872252163321295376887552831379210240000000000$, mit 63 Dezimalstellen eine unvorstellbar große Anzahl, die man durch systematisches Probieren in endlicher Zeit nicht ermitteln könnte. Wie würde man prinzipiell vorgehen? Man ordnet die Kugeln in der durch die Zahlen gegebenen Reihenfolge im Kreis an. Das ist die erste Möglichkeit. Nun vertauscht man die 1-er Kugel nacheinander mit allen restlichen 48. Damit sind mit dieser Kugel alle $n = 49$ Varianten durchgespielt. Im nächsten Schritt lässt man die 1-er Kugel auf ihrem Platz und wiederholt alles mit der 2-er Kugel. Dafür bleiben 48 Varianten usw., bis man bei Kugel 49 angelangt ist, für die nur eine mögliche Anordnung besteht (letzte Klammer $(n-(n-1)) = 1$).

Außerdem gilt: $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ (Haupteigenschaft der Fakultät)

und $0! = 1$ (**Definition**, also nicht fragen, „warum“ ...)

- **Variation:** Wie oft kann man m verschiedene Objekte unterschiedlich **bei** Beachtung der Reihenfolge auf n Plätzen anordnen: Antwort:

$$x = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Die Permutation ist also der Sonderfall der Variation für $m = n$.

- **Kombination:** Wie oft kann man m Objekte aus n Objekten unterschiedlich **ohne** Beachtung ihrer Reihenfolge anordnen? Auf jeden Fall weniger oft als im vorhergehenden Fall, nämlich

$$x = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m} \quad (\text{„n über m“ } \mathbf{Kombinationen})$$

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 Zahlen aus 49 zu wählen:

$$x = \binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816$$

Die Chance, 6 Richtige zu erzielen, ist also leider nicht sehr groß ...

Besondere Fälle:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad (\text{wieder eine Definition ...})$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \quad (\text{Symmetrie!}).$$

Wo werden diese Komplexionen-Funktionen gebraucht? Z. B. bei der Auswertung der binomischen Formel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n \dots$$

Die beiden Terme a und b treten beim Ausmultiplizieren als Produkte mit allen Kombinationen der Exponenten von 0 bis n auf, wie oben zu sehen ist. Gleiche Kombinationen erscheinen dabei jeweils so oft, wie es dem Wert der zugeordneten „n über n“-Funktionen entspricht, den **Binomial-Koeffizienten**. Sie liegen symmetrisch zur Mitte, d. h., die beiden äußeren Terme sind 1, die beiden zweitäußeren n usw. Nach diesem Schema lässt sich das bekannte **Pascalsche Dreieck** aufbauen.

Eine weitere Anwendung findet man in der Informatik bei der statistischen Bestimmung von Übertragungsfehlern auf gestörten (= verrauschten) Kanälen. Die Informationen werden z. B. als Folgen übertragen, die in konstante Blöcke zu je n Signal-Bits unterteilt sind (= Wörter).

Wenn im Mittel pro n Signalbits eines fehlerhaft beim Empfänger eintrifft, entsteht die Frage, wie viele Blöcke im Mittel keinen Fehler haben werden, wie viele im Mittel einen Fehler aufweisen, wie viele zwei Fehler usw. Da man die gesendeten Informationsbits durch zusätzliche Prüfbits gegen Fehler „absichern“ kann, lässt sich durch solche statistischen Berechnungen die verbleibende mittlere Restfehlerrate vorhersagen. Dies ist für die Beurteilung der Fehlerkorrekturleistung verschiedener Verfahren von großer Bedeutung (ein Gebiet der Codierungstechnik).

Bei einer Blocklänge von n = 7 und im Mittel einem Fehler pro 7 Bit stellt sich z. B. folgende Fehlerverteilung ein, wenn man den Fall „0 Fehler“ als Referenzhäufigkeit auf 1 setzt:

0 Fehler: $\binom{7}{0} = 1$ -mal

1 Fehler: $\binom{7}{1} = 7$ -mal, weil der eine Fehler an 7 Stellen im Block auftreten kann.

2 Fehler: $\binom{7}{2} = 21$ -mal, weil 2 Fehler in 21 Kombinationen auftreten können

usw. Unter Berücksichtigung der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit $p = 1/7 = 0.143 = 14.3\%$ pro Bit sind dann von 100 Blöcken

- fehlerfrei (diese müssen nicht korrigiert werden)
- mit einem Fehler behaftet (diese können mit einem Verfahren zur 1-Bit-Fehlerkorrektur fehlerfrei gemacht werden)
- mit zwei Fehlern behaftet (diese und alle weiteren wären mit diesem Verfahren nicht

korrigierbar und gehen in die Restfehlerrate ein)

- usw.

8.8 Betragsfunktionen

In einigen Aufgabenstellungen, z. B. in der Ingenieurtechnik, treten Funktionen auf, die aus technisch-physikalischen Gründen prinzipiell nur positive Werte annehmen können. So ist die Haftreibungskraft als Funktion der Normalkraft in zwei entgegengesetzten Richtungen wirksam. Daher lautet das Haftreibungsgesetz

$$|F_H| = \mu \cdot F_N .$$

Die Betragsstriche bedeuten, dass der in die Gleichung eingehende Wert der Haftreibungskraft immer positiv (genau: gleich oder größer 0) ist. Die Behandlung solcher Aufgaben erzeugt leicht Irritationen. Man vermeidet sie, wenn man systematisch abfragt, für welche Bereiche F_H positiv und für welche F_H negativ sein wird. Für jeden dieser beiden Fälle „übersetzt“ man dann die Gleichung in ihre normale Form (die dann aber auch **nur** für diesen Bereich gilt!) und arbeitet damit weiter:

$$F_H \geq 0: \quad F_H = \mu \cdot F_N$$

$$F_H < 0: \quad -F_H = \mu \cdot F_N \quad (\text{weil bei negativem } F_H \text{ der Ausdruck } -F_H \text{ positiv ist !})$$

Hinter F_H und F_N würden im Allgemeinen von der jeweiligen Aufgabenstellung abhängige Gleichgewichtsbedingung stehen.

Ein einfaches abstraktes Beispiel ist die Funktion

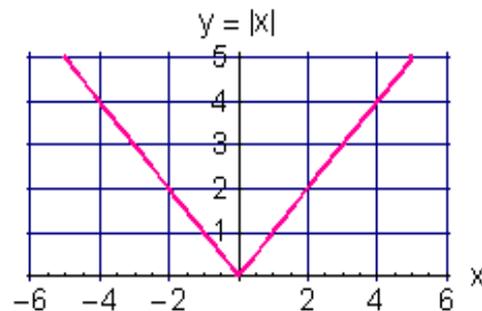
$$y = f(x) = |x| .$$

Nach dem genannten Vorgehen gilt

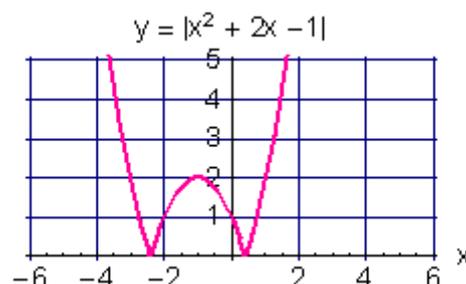
$$x \geq 0: \quad y = x$$

$$x < 0: \quad y = -x$$

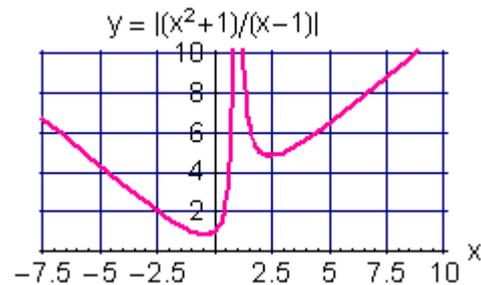
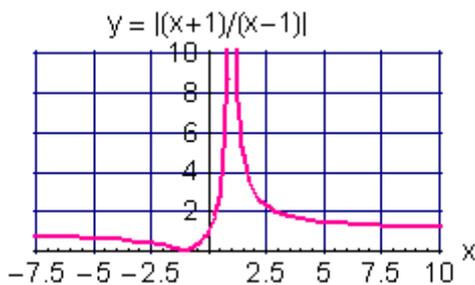
Der Graph der Funktion besteht nun, den beiden Bereichen entsprechend, aus zwei Teilen:



Die Funktion $y = f(x) = |x^2 + 2x - 1|$ hat folgenden Graphen:



Hier ist der negative Teil der Parabel „nach oben geklappt“. Die Verhältnisse bei gebrochenen Funktionen sind meist etwas schwerer zu überblicken:



Immer hilft es aber, bei Betragsfunktionen konsequent zunächst diejenigen Bereiche für x zu bestimmen, bei denen der Ausdruck innerhalb der Betragsstriche positiv oder negativ wird und dann zur „normalen“ Formulierung ohne Betrag überzugehen. Dieses systematische Vorgehen ist besonders angebracht, wenn statt der Betragsgleichung eine Betragsungleichung vorliegt und die Gültigkeitsbereiche zu bestimmen sind, die x hierfür erfüllen muss. Dieses ist bei technischen Aufgabenstellungen häufig gefragt. Z. B. wäre bei der Filter-ähnlichen Funktion (kommt in der Nachrichtentechnik vor) oben links interessant, für welche Frequenz x der Betrag größer als 1 ist, also

$$y = f(x) = \left| \frac{(x+1)}{(x-1)} \right| \geq 1 \quad .$$

Aus dem Diagramm lässt sich das ablesen, die Berechnung wird aber aufwändiger. Man betrachtet 4 Fälle:

- Für $1 \leq x \leq +\infty$ bleiben Zähler und Nenner positiv, daher gilt statt der Betragsstriche die „normale“ Form

$$y = \frac{(x+1)}{(x-1)} \geq 1 \quad \rightarrow \quad x+1 \geq x-1 \quad \rightarrow \quad 2 \geq 0 \quad ? \quad .$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllt, aber **Vorsicht**: Der Gültigkeitsbereich, für den diese Aussage nur zutrifft, ist $x \geq 1$!

- Für $0 \leq x \leq 1$ hat der Zähler einen positiven Wert, der Nenner dagegen ist negativ, die Ungleichung muss nun so aufgelöst werden:

$$y = \frac{(x+1)}{(-x+1)} \geq 1 \quad \rightarrow \quad x+1 \geq -x+1 \quad \rightarrow \quad 2x \geq 0 \quad ? \quad .$$

Für den Gültigkeitsbereich von x ist die Ungleichung auch hier immer erfüllt.

- Bei $-1 \leq x \leq 0$ bleibt der Zähler weiter positiv, der Nenner negativ, die Ungleichung ist

$$y = \frac{(x+1)}{(-x+1)} \geq 1 \quad \rightarrow \quad x+1 \geq -x+1 \quad \rightarrow \quad 2x \geq 0$$

und wird damit von keinem x im Gültigkeitsbereich erfüllt (siehe auch Diagramm), weil negative Zahlen sind immer kleiner als 0 sind.

- Für $-\infty \leq x \leq -1$ schließlich sind sowohl Zähler als auch Nenner negativ, die Ungleichung wird

$$y = \frac{(-x-1)}{(-x+1)} \geq 1 \quad \rightarrow \quad -x-1 \geq -x+1 \quad \rightarrow \quad -2 \geq 0$$

und ist ebenfalls nie erfüllt. Als Ergebnis aus diesen 4 Unterscheidungsfällen erhält man also die Antwort

$$x \geq 0 ,$$

wie es auch das Diagramm zeigt.

Frage: Welche Gültigkeitsbereiche hat die Ungleichung

$$y = \frac{(x^2 + 1)}{(x - 1)} \geq 6 , \text{ siehe auch rechtes Diagramm oben?}$$

8.9 Modulo-Funktion und endliche Zahlkörper

Im Kapitel 1 wurde bereits die Modulo-Funktion genannt. Sie ist für beliebige reelle Zahlen y und reelle „Moduln“ x definiert, wird im allgemeinen aber nur mit ganzzahligen Werten y und ganzzahligen positiven Moduln $x = n$ angewendet. In dieser Form stellen sie das wesentliche Hilfsmittel für die Fehlerkorrektur- und Verschlüsselungsverfahren der Codierungstechnik dar.

$$y \text{ MOD } n = y - i \cdot n \text{ mit } i \in \mathbb{Z} , \text{ so dass } 0 \leq y \text{ MOD } n \leq n - 1$$

Es handelt sich also um den positiven Rest der Division von y durch n . Die ganze Zahl i muss so gewählt werden, dass dieses Ziel erreicht wird. Beispiele:

$$37 \text{ Mod } 5 = 37 - 7 \cdot 5 = 2$$

$$-37 \text{ Mod } 5 = -37 + 8 \cdot 5 = 3$$

Bei negativen Operanden muss man also besonders aufpassen.

Für die Modulo-Rechnung gelten folgende Regeln:

$$\text{Addition: } (a+b) \text{ MOD } n = [a \text{ MOD } n + b \text{ MOD } n] \text{ MOD } n$$

$$\text{Subtraktion: } (a-b) \text{ MOD } n = [a \text{ MOD } n - b \text{ MOD } n] \text{ MOD } n$$

$$\text{Multiplikation: } (a \cdot b) \text{ MOD } n = [a \text{ MOD } n \cdot b \text{ MOD } n] \text{ MOD } n .$$

Die Modulo-Operation ist also mit Addition, Subtraktion und Multiplikation vertauschbar, sofern als Abschluss immer eine weitere Modulo-Operation durchgeführt wird. Besonders nützlich erweist sich das beim Potenzieren, das ja einen Sonderfall des Multiplizierens darstellt. Wenn man den Exponenten in eine Summe von Zweipotenzen aufteilt, lassen sich nach Bestimmen des Anteils mit dem Exponenten 1 alle weiteren Faktoren schrittweise hieraus ermitteln. Beispiel:

$$13^7 \text{ MOD } 5 = 13^{4+2+1} \text{ MOD } 5 = [(13^4 \text{ MOD } 5) \cdot (13^2 \text{ MOD } 5) \cdot (13^1 \text{ MOD } 5)] \text{ MOD } 5$$

$$13 \text{ MOD } 5 = 3$$

$$13^2 \text{ MOD } 5 = [(13 \text{ MOD } 5) \cdot (13 \text{ MOD } 5)] \text{ MOD } 5 = (3 \cdot 3) \text{ MOD } 5 = 4$$

$$13^4 \text{ MOD } 5 = [(13^2 \text{ MOD } 5) \cdot (13^2 \text{ MOD } 5)] \text{ MOD } 5 = (4 \cdot 4) \text{ MOD } 5 = 1$$

Das Gesamtergebnis ist nun das „Modulo 5“-Produkt der Einzelergebnisse:

$$13^7 \text{ MOD } 5 = 13^{4+2+1} \text{ MOD } 5 = [(1) \cdot (4) \cdot (3)] \text{ MOD } 5 = 2 .$$

Auch der letzte Schritt kann wieder in handliche Einzelpakete zerlegt werden. Der große **Vorteil** dieses Verfahrens liegt darin, dass in jedem Zwischenschritt nur Ergebnisse $< n^2$ auftreten. Gerade die modernen Verschlüsselungsverfahren (z. B. RSA-Algorithmus) verwenden vielhundertstellige Faktoren und Exponenten. Ohne diese Zerlegung wäre die Potenzierung hier praktisch nicht durchführbar. Man stelle sich dazu nur dieses vergleichsweise winzig kleine Beispiel vor:

$$429\,368\,772^{268\,920\,094} .$$

Es hat bereits 9-mal 268 920 094 Dezimalstellen. Selbst ein starkes Mathematikpaket wie Matlab ist hier bereits hoffnungslos überfordert.

Die Fehlerkorrekturverfahren der Datenübertragung spezialisieren die Module n auf Primzahlen p . Alle Rechenoperationen

$$y \text{ MOD } p$$

ergeben dann immer wieder Zahlen zwischen $0 \leq y \text{ MOD } p \leq p-1$. Diese Besonderheit verleiht den MOD p -Mengen die Eigenschaft von **endlichen Zahlkörpern**. Man bezeichnet sie auch als **Primkörper \mathbb{Z}_p** . Neben Addition, Subtraktion und Multiplikation ist hier auch die Division definiert, da es zu jedem Element a ein inverses Element $a^{-1} = \frac{1}{a} \text{ MOD } p$ mit

$$(a \cdot a^{-1}) \text{ MOD } p = 1 \text{ gibt.}$$

Man kann diese inversen Elemente mithilfe des **Euklidischen Algorithmus** sogar für sehr große Primkörper recht einfach bestimmen (siehe Skript zur Angewandten Informatik und Hilfsblatt **EA.pdf**).

Der Vorteil der Primkörper liegt darin, dass hiermit nützliche Ergebnisse erzielt werden können, die mit den gewohnten reellen Zahlen nicht möglich sind (Rechnen mit Galois-Feldern = Galoiskörpern). Insbesondere können Lösungen für Korrekturverfahren zur Beseitigung beliebig vieler (aber niemals aller) Fehler in einem Codewort konstruiert werden. Damit ist die Annäherung an die Shannon-Grenze prinzipiell möglich. Hierauf wird aber in diesem Zusammenhang nicht weiter eingegangen.

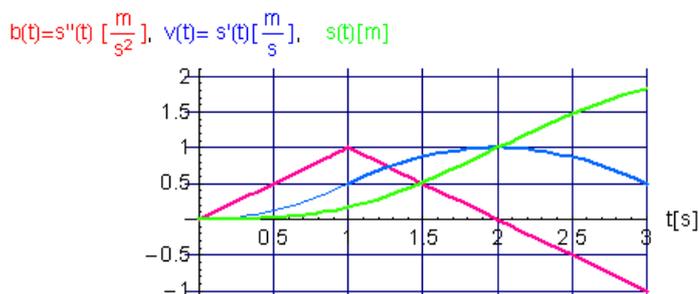
9 Differenzieren (= Ableiten) von Funktionen)

9.1 Ein paar Grundlagen

In vielen Aufgabenstellungen der Ingenieurtechnik ist nicht nur der Verlauf einer Funktion, sondern auch das Verhalten für bestimmte Werte der unabhängigen Veränderlichen interessant. So gibt die Weg-Zeit-Funktion einer bewegten Masse (ein Werkzeugschlitten einer CNC-Fertigungsmaschine, ein Fahrzeug usw.) über einen endlichen Zeitraum t_a und $s(t=0) = 0$ mit

$$\bar{v}_a = \frac{s(t_a)}{t_a}$$

zwar die Durchschnittsgeschwindigkeit für $t = 0$ bis $t = t_a$ an, sagt aber nichts – oder nicht sehr viel – über die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ der Masse zu einzelnen Zeitpunkten aus. Diese kann temporär kleiner oder größer als \bar{v}_a sein, wie im folgenden Diagramm dargestellt:



Der grüne Verlauf ist der Weg $s(t)$, das blaue Diagramm die temporäre (= momentane) Geschwindigkeit $v(t)$, der rote die Beschleunigung $b(t)$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt

$$\bar{v}_a = \frac{1.83}{3} = 0.61 \left[\frac{m}{s} \right],$$

die momentane Geschwindigkeit liegt zwischen 0 und 1 m/s, die momentane Beschleunigung zwischen 1 und -1 m/s².

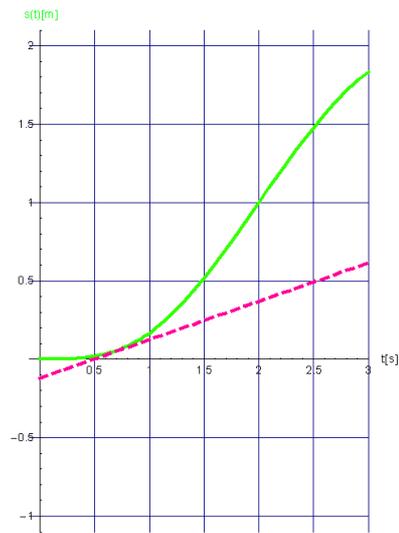
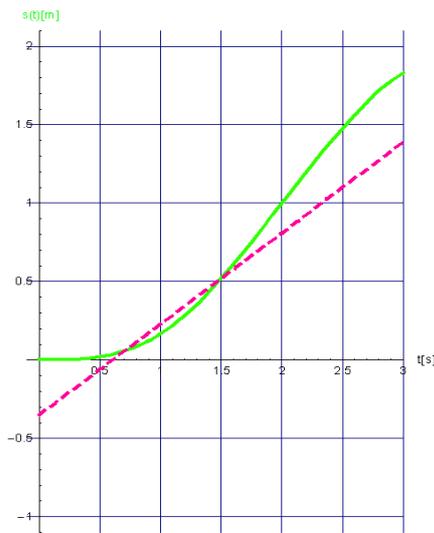
Änderungen der Geschwindigkeit gehen über die Beschleunigung $b(t)$ in die Beschleunigungs- oder Bremskräfte der bewegten Masse ein und sind daher für die benötigte Stärke der Antriebe und die Materialfestigkeit ausschlaggebend (hohe Beschleunigungen erfordern starke Antriebe und hohe Materialfestigkeiten → hohe Kosten).

Wie können nun bei gegebenem Verlauf des Weges über der Zeit $s(t)$ die momentanen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ermittelt werden? Man berechnet den Tangens des Neigungswinkels derjenigen Geraden, die $s(t)$ in einem beliebigen Punkt t berührt, ohne sie zu schneiden.

Mathematisch geht dieser Wert aus folgender **Grenzwertbetrachtung** hervor: Eine Gerade wird so in den grafischen Verlauf von $s(t)$ gelegt, dass sie diesen zunächst in zwei benachbarten Punkten $s(t_a)$ und $s(t_b)$ schneidet. Die Steigung dieser Geraden berechnet sich aus dem Quotienten

$$\bar{v}_{ba} = \frac{s(t_b) - s(t_a)}{t_b - t_a},$$

ist also ebenfalls eine Durchschnittsgeschwindigkeit. Hier ist $t_a = 0.7$ sec, $t_b = 1.5$ sec



Wegen der Differenzbildung in Zähler und Nenner wird dieser Quotient auch als **Differenzenquotient** bezeichnet - siehe linkes Diagramm:

$$\bar{v}_{ba} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Schiebt man den rechten Schnittpunkt immer weiter an den linken heran ($t_b \rightarrow t_a$), ohne ihn aber je zu erreichen, schneidet die Gerade schließlich den Graphen von $s(t)$ nicht mehr, sondern berührt ihn nur noch in t_a , siehe rechtes Diagramm, der Differenzenquotient geht in den – symbolischen – **Differenzialquotienten**

$$t_b \rightarrow t_a: \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \frac{ds}{dt} = v(t) = s'(t)$$

über und heißt **Ableitung** s „nach“ t . Im rechten Diagramm hat die berührende Gerade zum Zeitpunkt $t_a=0.7$ sec die Steigung bzw. den Neigungswinkel

$$\operatorname{tg} \alpha = 0.17 \rightarrow \alpha = 9.7^\circ$$

Für einige der Elementarfunktionen ist die Ableitung selbst wieder eine Elementarfunktion. Z. B. gilt für den Differenzenquotienten der Sinusfunktion unter Verwendung trigonometrischer Umformungen aus Kapitel 8.1.3

$$\Delta x \rightarrow 0: \sin'(x) = \lim \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim \frac{\sin(x) \cdot \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x) \cdot \cos(x)}{\Delta x}$$

mit $\cos(\Delta x) \rightarrow 1$

$\sin(\Delta x) \rightarrow \Delta x$ (mithilfe einer Taylorreihenentwicklung, siehe Kapitel ???, um den

Punkt $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\Delta x \rightarrow 0: \sin'(x) = \lim \frac{\sin(x) \cdot \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x) \cdot \cos(x)}{\Delta x} = \cos(x)$$

Mathematische Formelsammlungen, siehe Kapitel 18, enthalten die oft gebrauchten Ableitungen der Elementarfunktionen, hier eine kleine Auswahl:

$$y = a \quad y' = 0 \quad , (a \text{ ist eine beliebige reelle, konstante Zahl})$$

$$y = a \cdot x \quad y' = a$$

$$\begin{aligned}
 y &= x^n & y' &= n \cdot x^{n-1} \quad (n \text{ ist eine beliebige reelle Zahl, nicht nur ganzzahlig}) \\
 y &= e^x & y' &= e^x \\
 y &= a^x & y' &= a^x \cdot \ln(a) \\
 y &= \ln(x) & y' &= \frac{1}{x} \\
 y &= \log_a(x) & y' &= \frac{1}{x} \cdot \log_a(e) \\
 y &= \sin(x) & y' &= \cos(x) \\
 y &= \cos(x) & y' &= -\sin(x) \\
 y &= \tan(x) & y' &= \frac{1}{(\cos(x))^2} \\
 y &= \cotan(x) & y' &= -\frac{1}{(\sin(x))^2} \\
 y &= \arcsin(x) & y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 y &= \arccos(x) & y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .
 \end{aligned}$$

9.2 Regeln zum Differenzieren zusammengesetzter Funktionen

Mit einigen wenigen Rechenregeln können auch zusammengesetzte Funktionen oft auf einfachem Wege differenziert werden, dabei gilt $u = u(x)$ und $v = v(x)$:

- Die Ableitung von Konstanten ist 0: $y = a: y' = 0$
- Konstante Faktoren in Produkten bleiben unverändert: $y = a \cdot x: y' = a$
- Die Ableitung eines Summenausdrucks ist die Summe der Ableitungen der Summanden:
 $y = f(x) + g(x) + h(x): y' = f'(x) + g'(x) + h'(x)$
- Produktregel:
 $y = u \cdot v: y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- Quotientenregel: $y = \frac{u}{v}: y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
- Quotientenregel (Sonderfall für $u = 1$): $y = \frac{1}{v}: y' = -\frac{v'}{v^2}$
- Kettenregel (hier für 3 Verschachtelungen):
 $y = f(u(v(x))): y' = f'(u(v(x))) \cdot u'(v(x)) \cdot v' .$

Kommt die Variable x als Exponent vor, hilft ein „Trick“: Das Argument x bleibt unverändert, wenn man es in eine Funktion einbettet und darauf die Umkehrfunktion anwendet, z. B.:

$$x = \sin(\sin(x))$$

$$x = e^{\ln(x)}$$

Angewendet auf $y=a^x$ und Gebrauch der Rechenregel für Logarithmen, siehe Kapitel ???, erhält man über die Kettenregel:

$$y=a^x=e^{\ln(a^x)}=e^{x \cdot \ln(a)} \rightarrow y'=e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

Für $y=x^x$:

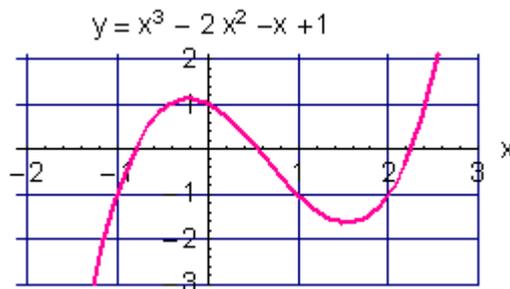
$$y=x^x=e^{\ln(x^x)}=e^{x \cdot \ln(x)} \rightarrow y'=e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + \frac{x \cdot 1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1) \quad (\text{mit Produktregel}).$$

9.3 Anwendungen des Differenzierens

9.3.1 Bestimmung von Extremwerten

Ableitungen werden in der Ingenieurtechnik in vielfältiger Weise gebraucht. Eine Anwendung ist z. B. die Bestimmung von Extremwerten bei Funktionen. Extremwerte von differenzierbaren Funktionen liegen an den Stellen vor, bei denen der Wert der Ableitung 0 ist. Die berührende Gerade hat hier die Steigung 0. Die Funktion

$$y=x^3-2 \cdot x^2-x-1$$



hat den Graphen

Die beiden Extremstellen lassen sich entweder aus den Nullstellen der Ableitung

$$y' = 3x^2 - 4x - 1 = 0$$

berechnen oder aus dem Diagramm als ca. $x_1 = -0.2$, $x_2 = 1.5$ ablesen.

Außerdem muss noch ermittelt werden, welcher Extremwert ein Minimum und welcher ein Maximum darstellt – und welcher Funktionswert dahinter steht. Wiederum gibt im vorliegenden Fall das Diagramm unmittelbar darüber Auskunft. Will man eine rechnerische Antwort finden, ermittelt man den Wert der zweiten Ableitung an den Extremstellen x_i :

$$y'' = 6x - 4$$

Es sind 3 Fälle möglich:

- Fall $y''(x_i) > 0$: Minimum, der Graph ist nach oben konkav gekrümmt („Vase richtig“)
- Fall $y''(x_i) < 0$: Maximum, der Graph ist nach unten konkav gekrümmt („Vase verkehrt“)
- Fall $y''(x_i) = 0$: Hier liegen mehrfache Extremwerte vor. Ein Beispiel ist die kubische Parabel $y = x^3$ mit $y' = 3 \cdot x^2$. y' hat eine doppelte Nullstelle bei $x = 0$.

Die zweite Ableitung ist

$y'' = 6 \cdot x$, für $x = 0$ kann also hier nicht entschieden werden, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt. Dann muss nochmals abgeleitet werden:

$$y''' = 6 \quad , \text{ der Wert ist nun positiv, es liegt ein Minimum vor.}$$

Bei

$y = x^4$ muss man entsprechend 4-mal ableiten, ehe man zu einer verwertbaren

Aussage kommt:

$$y'''' = 24 \text{ , auch hier ist der Wert positiv, so dass ein Minimum gegeben ist.}$$

Doppelte Nullstellen der ersten Ableitung identifizieren einen **Sattelpunkt**, hier wechselt die Konkavität (= Krümmung) des Graphen nach oben oder unten. Aber **Vorsicht**: Bei mehr als zweifachen Nullstellen muss der Funktionsverlauf genauer untersucht werden, eine Aussage über den Charakter der Extremstelle erfordert die Einbeziehung höherer Ableitungen.

Ein weiteres einfaches Beispiel ist gegeben, wenn man die Maximalleistung an einem ohmschen Widerstand R_L ermitteln will, der an einer Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand R_i betrieben wird, siehe Kapitel ??? :

$$P_{R_L} = P(R_L) = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} \cdot U_0^2$$

Der Extremwert ergibt sich durch Anwendung der Quotientenregel aus:

$$\frac{dP_{R_L}}{dR_L} = \frac{(R_i + R_L)^2 - 2(R_i + R_L) \cdot R_L}{(R_i + R_L)^4} \cdot U_0^2 = 0$$

Gebrochene Ausdrücke sind 0, wenn der Zähler 0 ist (und nicht zugleich der Nenner den Wert 0 annimmt). Daraus folgt hier

$$R_L = R_i \text{ .}$$

9.3.2 Beseitigung von Unbestimmtheitsstellen (l'Hospital-Regel)

Bei einer Reihe von gebrochenen oder auch anderen Funktionen gibt es Werte der unabhängigen Variablen x , für die unbestimmte Ausdrücke der Form

- $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$
- 0^∞ , ∞^0 , 1^∞

entstehen. Falls diese Funktionen in denjenigen Intervallen, in denen diese Unbestimmtheitsstellen liegen, beliebig differenzierbar sind, kann man durch Anwendung der Regel von **l'Hospital** auch die Unbestimmtheitsstellen mit einem definierten Wert belegen. Damit werden die Funktionen durchgehend bestimmt gemacht.

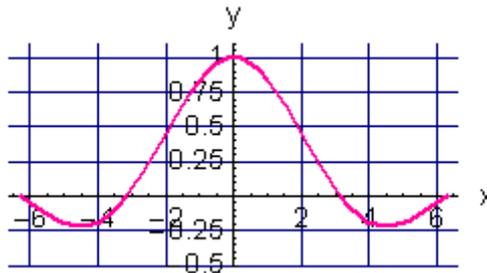
Unbestimmtheitsstellen der gebrochenen ersten 4 Formen lassen sich immer auf Ausdrücke $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zurückführen. Danach werden Zähler und Nenner jeweils für sich abgeleitet, in das Ergebnis wird die unabhängige Variable x eingesetzt. Falls das Ergebnis bestimmt ist, kann man dieses verwenden, wenn nicht, wird nochmals abgeleitet usw. Ein Beispiel: Die Funktion

$$y = \frac{\sin(x)}{x} \text{ (kommt in der Nachrichtentechnik vor)}$$

nimmt für $x = 0$ den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ an. Zähler und Nenner sind überall differenzierbar. Daher wird der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} \xrightarrow{\frac{1}{1}} 1 \text{ .}$$

Sieht man sich den Graphen an,



so erscheint die Definition $y(0) = 1$ folgerichtig, da die Funktion sowohl von links als auch von rechts gegen diesen gemeinsamen Wert strebt. Ein weiteres Beispiel: Die Funktion

$$y = \frac{\ln\left[\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right]}{\ln\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

nimmt für $x = \frac{\pi}{2}$ den Ausdruck $\frac{0}{0}$ an.

Hier müssen Zähler und Nenner zweimal differenziert werden, man erhält den Wert 4.

9.3.3 Reihenentwicklungen (Potenzreihen, Taylor-Reihen)

Bei der Verarbeitung von mathematisch-technischen Ausdrücken (Gleichgewichtsbedingungen, Lösungen von Gleichungssystemen usw.) entstehen häufig nichtlineare oder transzendente Anteile, mit denen sich nur mit Mühe weiter rechnen lässt. Hier hilft es dann oft erheblich, den Ausdruck um einen interessierenden Wert $x = a$ der unabhängigen Variablen herum durch ein Polynom in x zu beschreiben – wenn dies geht. Im Extremfall verwendet man von diesem Polynom nur den Anteil bis zum linearen Term mit x und hat dadurch die Funktion um a herum näherungsweise durch eine Gerade ersetzt. Dieser Vorgang heißt „**Linearisierung**“. Man muss allerdings sicherstellen, dass die durch die Näherung bedingten Abweichungen vom tatsächlichen Verlauf noch zulässig bleiben.

Als Hilfsmittel dient die Reihenentwicklung nach Taylor. Sie wird, da es sich um eine Summe mit Potenzen von x handelt, auch **Potenzreihenentwicklung** genannt. Für eine beliebige Funktion

$$y = f(x)$$

gilt um den Punkt $x = a$ unter bestimmten **Konvergenzbedingungen** bei unendlich vielen Termen:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} + f''(a) \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a) \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} \dots + \text{Rest}$$

In Formelsammlungen (siehe Kapitel 18) findet man solche Reihenentwicklungen für eine Vielzahl vorkommender Funktionen mit Angabe des **Konvergenzbereichs** für x , der unbedingt beachtet werden muss. Die Angaben beziehen sich meistens auf die Umgebung von $x = 0$, so dass die Reihen in der Form

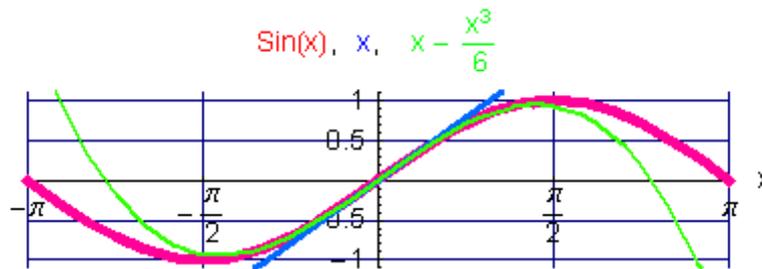
$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot \frac{x^1}{1!} + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + f'''(0) \cdot \frac{x^3}{3!} \dots + \text{Rest}$$

angegeben sind. Ein Beispiel: Die Sinus-Funktion hat die Reihenentwicklung

$$y = f(x) = \sin x = 0 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots, \text{ Konvergenzbereich } |x| < \infty.$$

Verwendet man nur den linearen Term $f(x) \approx x$, so besteht die Näherung aus der Geraden x .

Mit dem kubischen Term hat man eine kubische Parabel $f(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$ usw. :



Das Diagramm zeigt, dass um $x = 0$ herum bis ca. $x = \pm \frac{\pi}{6}$ die Näherung gut zu sein scheint, oder - etwas präziser - die Abweichung im Prozentbereich liegen wird, was für viele Anwendungen ausreichen kann. In komplexen Ausdrücken wirkt sich das für die weitere Verarbeitung angenehm aus.

Benötigt man die Näherung für einen größeren Bereich, eignet sich die kubische Parabel besser. Sie reicht von $x=0$ bis ca. $x = \pm \frac{3\pi}{8}$. Weitere Terme ergeben noch besserer Näherungen, allerdings geht der Vorteil der leichten Weiterverarbeitung schnell wieder verloren, so dass man anstreben wird, mit dem linearen Term auszukommen.

10 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen sind in der Ingenieurtechnik ein zwar recht abstraktes, aber sehr starkes Hilfsmittel, um aufwändige Rechnungen wesentlich zu erleichtern. Sie gehören daher unbedingt in den „Werkzeugkasten“.

10.1 Grundlagen

Die quadratische Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ scheint formal die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -0.5 \pm \sqrt{0.25 - 1} = -0.5 \pm \sqrt{-0.75} .$$

zu haben. Da unter der Wurzel aber eine negative Zahl steht und ein solcher Ausdruck in der Menge der reellen Zahlen nicht definiert ist, gibt es für diese Gleichung bei den reellen Zahlen gar keine Lösung.

Setzt man sich andererseits darüber hinweg - was Mathematikern die Haare zu Berge stehen lässt - und behält den Wurzelausdruck unverändert bei, dann führt die Probe nach Einsetzen der beiden Lösungen wieder auf die Ausgangsgleichung:

$$\begin{aligned} (x - x_1) \cdot (x - x_2) &= (x - (-0.5 + \sqrt{-0.75})) \cdot (x - (-0.5 - \sqrt{-0.75})) \\ &= x^2 - (-0.5 + \sqrt{-0.75}) \cdot x - (-0.5 - \sqrt{-0.75}) \cdot x + (-0.5 + \sqrt{-0.75}) \cdot (-0.5 - \sqrt{-0.75}) \\ &= x^2 - (-0.5 - 0.5)x + ((-0.5)^2 - (\sqrt{-0.75})^2) \\ &= x^2 - (-1)x + (0.25 - (-0.75)) = x^2 + x + 1 . \end{aligned}$$

Man kann also wenigstens vermuten, dass beim Rechnen mit Ausdrücken von Wurzeln mit negativem Radikanden vielleicht doch vernünftige Ergebnisse entstehen. Der geniale C. F. Gauß hat gezeigt, dass die Einbeziehung derartiger Wurzelausdrücke zulässig ist und sich bei dieser merkwürdigen Erweiterung sogar erhebliche Vorteile bei den verschiedensten Rechnungen ergeben. Er nannte Quadratwurzeln aus negativen reellen Zahlen **imaginäre Zahlen**, da sich ihnen keine realen Objekte zuordnen lassen. Zwar gibt es $\sqrt{1} = 1$ Banane, aber nicht $\sqrt{-1}$ Babane.

Zur Abkürzung schrieb Gauss $\sqrt{-1} = i$ als imaginäre Zahleneinheit. Da in der Elektrotechnik das Zeichen i für den Strom verwendet wird, ist zur Unterscheidung dort die Bezeichnung $\sqrt{-1} = j$ üblich. Wir belassen es aber bei „i“.

Unter Verwendung dieser Abkürzung und wegen der Regeln zum Rechnen mit Wurzelausdrücken kann man die obigen Lösungen auch als

$$x_{1,2} = -0.5 \pm \sqrt{-0.75} = -0.5 \pm \sqrt{(-1) \cdot 0.75} = -0.5 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{0.75} = -0.5 \pm i \sqrt{0.75}$$

schreiben. Sie setzen sich aus dem rein reellen Teil -0.5 und dem rein imaginären Teil $\pm j \sqrt{0.75}$ zusammen. Man nennt diese Zusammensetzungen daher **komplexe Zahlen**. Allgemein werden komplexe Zahlen als

$$z = a + i \cdot b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

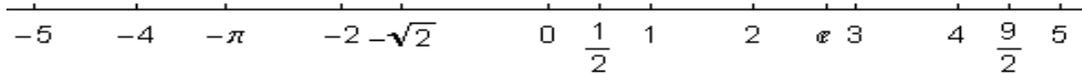
dargestellt. Realteil und Imaginärteil von z unterscheidet man auch durch

$$\operatorname{Re}(z) = a$$

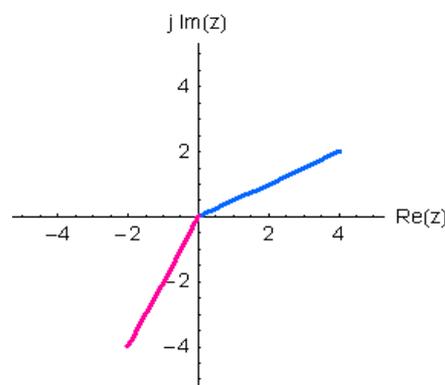
$$\operatorname{Im}(z) = b, \text{ also ohne } j.$$

10.2 Die komplexe Zahlenebene

Zur Veranschaulichung von reellen Zahlen verwendet man oft die Zahlengerade. Sie reicht gedanklich von $-\infty$ bis $+\infty$ und kann als x -Achse eines Koordinatensystems angesehen werden, auf der zur leichteren Orientierung die Lage bestimmter Zahlen markiert ist:



Zur Veranschaulichung komplexer Zahlen z hat Gauß die **komplexe Zahlenebene** vorgeschlagen. Die senkrechte Achse ist die imaginäre Achse und enthält alle mit der imaginären Einheit j multiplizierten reellen Zahlen:



Jede komplexe Zahl kann darin als Punkt eingetragen werden. Üblicher ist die Darstellung als Vektor mit den beiden Koordinaten $\text{Re}(z)$ und $\text{Im}(z)$. In der komplexen Ebene heißen diese Vektoren **Zeiger**. Sie haben einen Betrag (= Länge) und einen Winkel. Wie bei Vektoren sind Betrag und Winkel als

$$|z| = |(z)| = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}\right) \quad (\text{Quadrant beachten !})$$

definiert. Da die Tangens-Funktion periodisch mit π verläuft, ist für die arctg-Funktion in Tabellen und auf Taschenrechnern meist nur der Hauptwertbereich $-\frac{\pi}{2} < \phi < +\frac{\pi}{2}$ angegeben. Der Winkel ϕ kann aber je nach Quadrant im Bereich $-\pi \leq \phi \leq +\pi$, oder, was wegen der Periodizität dasselbe ist, im Bereich $0 \leq \phi \leq +2\cdot\pi$ liegen. Daher müssen im II. und III. Quadranten die Ergebnisse um den additiven Betrag $+\pi$ korrigiert werden. Aber **Vorsicht**: Manche Mathematik-Programme berücksichtigen die Lage des Quadranten bereits, also im Handbuch nachsehen oder ausprobieren, siehe auch Kapitel ???

Im normalen Alltag rechnet man mit den gewohnten reellen Zahlen a für $a \in \mathbb{R}$. Wendet man Funktionen auf reelle Zahlen an, so ergeben sich wiederum reelle Zahlen. Einige Funktionen gestatten dabei nur definierte Wertebereiche für a , so z. B. die Wurzelfunktion $b = \sqrt{a}$, die lediglich für $a \geq 0$ gilt (selbst allerdings positiv und negativ ist). Insbesondere gibt es für $i = \sqrt{-1}$ keine Lösung im Bereich der reellen Zahlen.

Da sich mit $i = \sqrt{-1}$ aber für viele Aufgaben sinnvolle Lösungen bestimmen lassen würden, haben die Mathematiker den Ausdruck $\sqrt{-1}$ für zulässig erklärt und ihm die imaginäre **Einheit i** zugeordnet. Obwohl man zu dieser Einheit keine Bedeutung in der realen Welt findet, lassen sich

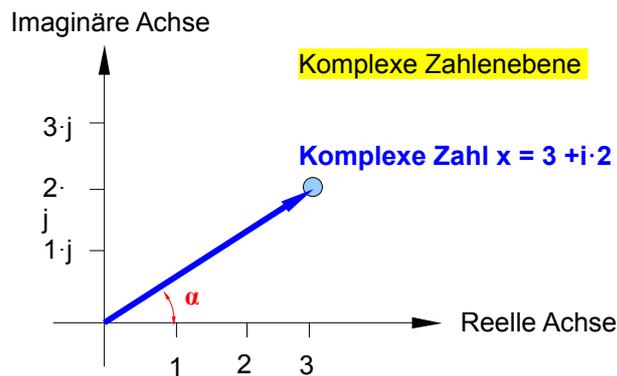
bei entsprechendem Aufbau eines erweiterten Zahlensystems damit Rechnungen für Aufgaben aus der realen Welt wesentlich vereinfachen oder überhaupt erst ermöglichen. Die imaginäre Einheit hat folgende Eigenschaften:

$$i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 = (-1) \cdot (-1) = +1$$

Das mit den reellen Zahlen und „j“ aufbaubare erweiterte System ist das der **komplexen Zahlen** und kann mit Hilfe eines Koordinatensystems, der **komplexen Zahlenebene**, dargestellt werden.



Jeder Punkt in der komplexen Zahlenebene ist also einer komplexen Zahl zugeordnet und besteht aus den „Koordinaten“ **Realteil (Re)** und **Imaginärteil (Im)**. Allgemein schreibt man komplexe Zahlen in 3 gleichwertigen Formen, wobei jede für die definierten Operationen Vor- und Nachteile aufweist, so dass man die jeweils günstigere Darstellung frei wählen und in eine der anderen umrechnen kann:

$$x = a + i \cdot b = |x| \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) = |x| \cdot e^{i \cdot \alpha}$$

mit

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Pythagoras})$$

$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{atan} = \text{arcustangens} = \text{Umkehrfunktion zum Tangens})$$

Zu jeder komplexen Zahl x gibt es eine **konjugiert komplexe Zahl** $\bar{x} = a - i \cdot b$, deren Imaginärteil den dazu negativen Wert aufweist. In der komplexen Ebene liegt sie spiegelbildlich zu reellen Achse.

Die oben gezeigten Formen heißen

$$x = |x| \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) = \text{Moivrische Form oder Polarform}$$

$$x = |x| \cdot e^{i \cdot \alpha} = \text{Euler-Form, } e^{i \cdot \alpha} \text{ ist die Exponentialfunktion.}$$

Hinweis: Es besteht folgender bemerkenswerter Zusammenhang $e^{i \cdot \pi} = -1$.

10.3 Rechenoperationen

Mit $y = c + i \cdot d$ können die Grundoperationen ausgeführt werden:

Addition und Subtraktion:

$$x + y = (a + c) + i \cdot (b + d) \quad \text{und} \quad x - y = (a - c) + i \cdot (b - d)$$

Multiplikation:

$$x \cdot y = (a \cdot c - b \cdot d) + i \cdot (a \cdot d + b \cdot c)$$

Die Multiplikation einer komplexen Zahl x mit ihrer konjugiert komplexen Zahl \bar{x} ergibt eine reelle Zahl:

$$x \cdot \bar{x} = (a + i \cdot b) \cdot (a - i \cdot b) = a^2 + b^2$$

Division:

Hierfür ist es nützlich, Zähler und Nenner mit dem konjugiert komplexen Nenner zu erweitern, da dann im Nenner eine rein reelle Zahl entsteht:

$$\frac{x}{y} = \frac{a + i \cdot b}{c + i \cdot d} = \frac{a + i \cdot b}{c + i \cdot d} \cdot \frac{c - i \cdot d}{c - i \cdot d} = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{-a \cdot d + b \cdot c}{c^2 + d^2}$$

Mit der Euler-Form können Multiplikation und Division wesentlich vereinfacht werden, sind zuvor aber erst umzuwandeln:

$$x = a + i \cdot b = |x| \cdot e^{i \cdot \alpha} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{i \cdot \alpha}$$

$$y = c + i \cdot d = |y| \cdot e^{i \cdot \beta} = \sqrt{c^2 + d^2} \cdot e^{i \cdot \beta}$$

Damit werden Multiplikation und Division:

$$x \cdot y = |x| \cdot |y| \cdot e^{i \cdot (\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|} \cdot e^{i \cdot (\alpha - \beta)}$$

11 Integrieren

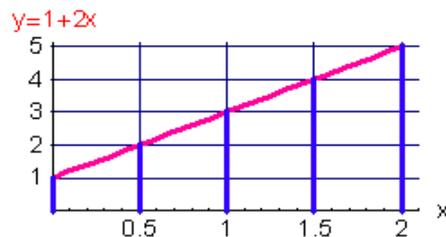
11.1 Grundlagen

„**Wer Differenzieren kann, kann auch Integrieren**“. Diese Feststellung gilt zwar nicht uneingeschränkt, aber zu einem großen Teil. Integrieren ist im Wesentlichen die Umkehrung des Differenzierens. Geometrisch stellt das Integrieren die Ermittlung des Flächeninhalts zwischen dem Graphen einer gegebenen Funktion $f(x)$ und der x -Achse dar. Dabei werden Flächenanteile oberhalb der x -Achse **positiv**, unterhalb **negativ** gezählt.

Am Beispiel der Funktion

$$y = f(x) = 1 + 2 \cdot x$$

kann man sich das veranschaulichen. Ihr Graph ist



Der Flächeninhalt unter y (oder unter einer beliebigen Funktion) kann zwischen zwei Abszissenwerten $x_i = i \cdot \Delta x$ und $x_{i-1} = (i-1) \cdot \Delta x$ näherungsweise aus schmalen trapezförmigen Flächenstreifen ΔA_i der Breite Δx zusammengesetzt werden. Im vorliegenden Beispiel hat jedes Trapez die Fläche

$$\Delta A_i = \frac{y(i \cdot \Delta x) + y((i-1) \cdot \Delta x)}{2} \Delta x$$

(und stellt hier sogar den exakten Wert dar).

Die Gesamtfläche A ist die Summe der $n = 4$ Teilflächen:

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (1 + 2 \cdot i \cdot \Delta x + 1 + 2 \cdot (i-1) \cdot \Delta x) \Delta x$$

$$A = \sum_{i=1}^n (\Delta x + 2 \cdot i \cdot \Delta x^2 - \Delta x^2) = n \cdot \Delta x + 2 \cdot n \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot \Delta x^2 - n \cdot \Delta x^2$$

$$A = n \cdot \Delta x + n^2 \cdot \Delta x^2$$

Bezeichnet man die untere Abszisse mit x_a , die obere mit x_b , dann wird im Beispiel

$$x_a = 0, \quad x_b = n \cdot \Delta x$$

und die Fläche erhält den Wert

$$A = x_b + x_b^2.$$

Erstreckt man zur Kontrolle die Trapezformel insgesamt über den Bereich von x_a bis x_b , dann ist ebenfalls

$$A = \frac{y(x_a) + y(x_b)}{2} \cdot x_b = \frac{1 + 0 + 1 + 2 \cdot x_b}{2} \cdot x_b = x_b + x_b^2.$$

Der Integrationsvorgang stellt den **Grenzübergang** der obigen Summenbildung dar, wenn die Flächenstreifen ΔA_i mit $\Delta x \rightarrow dx$ beliebig schmal, jedoch nicht 0 gemacht werden. Dann

läuft bei festem x_b der Summengrenzindex gegen $n \rightarrow \infty$ und ΔA_i geht in dA über. Dies drückt man über ein stilisiertes Summenzeichen \int mit

$$A = \int_{x_a}^{x_b} dA = \int_{x_a}^{x_b} f(x) \cdot dx \text{ aus,}$$

wobei es sich, ähnlich wie beim Differenzenquotienten, um eine **symbolische Schreibweise** handelt. Man muss also nicht danach fragen, „welchen Wert“ das dx eigentlich hat.

Da dx beliebig klein - aber nicht 0 - sein kann, wird auch die Höhe des Trapezes schließlich nur noch vom Funktionswert $y = f(x)$ selbst dargestellt: Der Charakter des Trapezes als endliche Fläche verschwindet.

Nach diesen Vorüberlegungen nun zurück zur Integration als Umkehrung der Differenziation. Wie das Beispiel ahnen lässt, hängt $f(x)$ mit der Ableitung der Fläche A zusammen oder genauer: Bei variabler Obergrenze $z = x_b$ ist $f(z)$ die Ableitung

$$\frac{dA(z)}{dz} = f(z) \text{ .}$$

Daraus wird umgekehrt

$$dA(z) = f(z) \cdot dz \text{ , oder nach „Summenbildung“ auf beiden Seiten}$$

$$A(z) = \int dA(z) = \int f(z) \cdot dz \text{ .}$$

Da hier keine Grenzen angegeben sind, spricht man von **unbestimmter Integration** im Gegensatz zur **bestimmten Integration** mit fester unterer und oberer Grenze. Um $A(z)$ zu ermitteln, muss die Ableitung

$$\frac{dA(z)}{dz} = f(z)$$

rückgängig gemacht werden. Im Beispiel ist

$$f(z) = 1 + 2 \cdot z \text{ , also}$$

$$A(z) = \int f(z) dz = \int (1 + 2 \cdot z) dz = z + 2 \cdot \frac{z^2}{2} + C = z + z^2 + C \text{ .}$$

Das Teilergebnis

$$z + z^2$$

ist die **Stammfunktion** zu $f(z)$. Im Gesamtergebnis muss bei unbestimmter Integration noch eine unbestimmte Konstante C hinzugefügt werden. Sie fällt bei der Ableitung $A'(z) = f(z)$ wieder heraus. Bei der bestimmten Integration bleibt sie jedoch weg, da das Ergebnis ja einen festen Flächenwert annimmt. Im Beispiel wird

$$A(x_b) = \int_{x_a}^{x_b} f(z) dz = \int_{x_a}^{x_b} (1 + 2 \cdot z) dz = [z + z^2]_{x_a}^{x_b} = x_b + x_b^2 \text{ ,}$$

was mit den vorher auf anderen Wegen durchgeführten Rechnungen übereinstimmt.

Obwohl das Integrieren sehr eng mit dem Differenzieren zusammenhängt, ist es bei der Anwendung auf elementare Funktionen oft viel aufwändiger. Das zeigen schon die Unterschiede im Umfang der entsprechenden Formelsammlungs-Kapitel zum Differenzieren und Integrieren. Es folgen einige unbestimmte Integrale als Stammfunktionen $F(x)$ zu den **Integranden** $y = f(x)$. Die Integranden sind dabei diejenigen Funktionen, welche unter dem Integralzeichen stehen, aber ohne das „ dx “.

$$y=0 \rightarrow F(x)=C$$

$$y = a \rightarrow F(x) = a \cdot x + C$$

$$y = a \cdot x^n \rightarrow F(x) = a \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

(n kann eine beliebige reelle Zahl außer $n = -1$ sein)

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow F(x) = \ln(x) + C$$

$$y = \sin(x) \rightarrow F(x) = -\cos(x) + C$$

$$y = \cos(x) \rightarrow F(x) = \sin(x) + C$$

$$y = \frac{1}{(\cos x)^2} \rightarrow F(x) = \operatorname{tg}(x) + C$$

$$y = \frac{1}{(\sin x)^2} \rightarrow F(x) = -\operatorname{cotg}(x) + C$$

11.2 Einige Rechenregeln für das Integrieren

- a) Konstanten im Integranden bleiben unverändert und können vor das Integral gezogen werden:

$$\int a \cdot u(x) dx = a \cdot \int u(x) dx .$$

- b) Eine Konstante vor dem Argument kann als reziproker Wert vor die Stammfunktion gezogen werden (wegen der Kettenregel des Differenzierens):

$$\int u(a \cdot x) dx = \frac{1}{a} \cdot F(a \cdot x) + C .$$

Beispiel: $\int \cos(3 \cdot x) dx = \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot x) + C .$

- c) Integrale von Summen können in Summen von Integralen zerlegt werden (da Integrale selbst sind Summen sind) :

$$\int (u(x) + v(x)) dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx .$$

- d) Helfen die Regeln (1), (2) oder (3) nicht weiter, kann man zunächst in einer Formelsammlung nachsehen (Papula, Bronstein u. a.)

- e) Aus der Produktregel für das Differenzieren folgt mit $u = u(x)$ und $v = v(x)$:

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx \quad (\text{partielle Integration}).$$

Beispiel: $\int x \cdot \sin(x) dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$, mit $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = \sin(x) \rightarrow v(x) = -\cos(x)$ wird

$$\int x \cdot \sin(x) dx = -x \cdot \cos(x) + \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx = -x \cdot \cos(x) - \sin(x) + C .$$

Allgemein lässt sich die partielle Integration mit Vorteil einsetzen, wenn $u(x)$ wie oben

gezeigt durch Differenzieren auf einfachere Formen führt, und für $v(x)$ eine Stammfunktion bekannt ist.

- f) Ist x selbst die Funktion $x=\phi(t)$ einer unabhängigen Variablen t und besteht der Integrand aus einem Produkt, dessen einer Faktor die Ableitung $\frac{dx}{dt}=\phi'(t)$ darstellt, so lässt sich die **Substitutionsregel** anwenden:

$$\int f(x)dx = \int f[\phi(t)] \cdot \phi'(t) dt \quad , \text{ da sich aus } \frac{dx}{dt}=\phi'(t) \rightarrow dx=\phi'(t)dt \text{ ergibt.}$$

Beispiel: $\int 4 \cdot x^3 \cdot e^{x^4} dx = ? \rightarrow$ Substitution $t=x^4$, $dt=4 \cdot x^3 \cdot dx \rightarrow dx=\frac{dt}{4 \cdot x^3}$

$$\int f(x)dx = \int 4 \cdot x^3 \cdot e^t \cdot \frac{1}{4 \cdot x^3} dt = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^4} + C \quad .$$

- g) Ist $f(x)$ eine gebrochene Polynomfunktion, so kann diese durch **Partialbruchzerlegung** in eine Summe von einfach zu integrierenden Teilen umgeformt werden. Hierzu wird der Nenner von $f(x)$ zunächst in das Produkt der Linearfaktoren mit den Nullstellen zerlegt, anschließend als Summe rationaler Teilfunktionen mit unbestimmten Koeffizienten dargestellt und wieder auf einen Nenner gebracht.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1) \cdot (x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A \cdot (x-2) + B \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x-2)}$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

für x^1 : $(A+B)=0$, da der Zähler von $f(x)$ keinen Term mit x enthält,

für x^0 : $-2 \cdot A - B = 1$, da der Term im Zähler bei x^0 gleich 1 ist.

Dies stellt ein lineares Gleichungssystem für die beiden Konstanten A und B dar. Die Lösung ergibt mit $A=-B \rightarrow 2B-B=1 \rightarrow B=1 \rightarrow A=-1$.

Mit $f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ wird das Integral

$$\int f(x)dx = \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = -\ln(x-1) + \ln(x-2) + C \quad .$$

Weitere Varianten zur Partialbruchzerlegung siehe im nächsten Kapitel 11.3.

11.3 Partialbruchzerlegung

Ist der Integrand eine gebrochene rationale Funktion (= Zähler und Nenner sind Polynome), dann lässt er sich durch das Verfahren der Partialbruchzerlegung so in Summanden aufspalten, dass deren Integration mit elementaren Funktionen möglich wird. Dabei treten im Wesentlichen drei Fälle auf:

- a) Das Nennerpolynom enthält nur n **einfache reelle** Nullstellen. Dann ergibt die Partialbruchzerlegung:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

- b) Man bringt die Partialbrüche auf den gleichen Nenner und ermittelt die unbekanntenen Koeffizienten A_1, A_2, \dots, A_n durch Koeffizientenvergleich mit $p(x)$. Dadurch entsteht ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich die Koeffizienten bestimmen lassen, siehe Beispiel in Kapitel ???, Punkt g).

Ein **Trick** erspart hier das Lösen des LGS: Man setzt nacheinander die Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_n ein und erhält die Koeffizienten direkt.

- c) Das Nennerpolynom enthält die mehrfache Nullstelle x_1 .

Dann wird für jede Vielfachheit von x_1 ein zusätzlicher Partialbruch angesetzt. Beispiel für die Vielfachheit 2:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1) \cdot (x-x_1)^2 \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{B_1}{(x-x_1)^2} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

Die Lösung erfolgt wieder wie bei Fall a), allerdings lässt sich der dort genannte „Trick“ nur noch teilweise anwenden, so dass immer ein – wenigstens reduziertes LGS zu lösen ist.

- d) Das Nennerpolynom enthält konjugiert komplexe Nullstellenpaare. Diese lassen sich immer als quadratische Polynome mit reellen Koeffizienten b, c darstellen:

$(x-x_1) \cdot (x-\bar{x}_1) = x^2 + bx + c$. Dann wird der Zähler des zugehörigen Partialbruches als Polynom von Grad 1 dargestellt:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1) \cdot (x-\bar{x}_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)} = \frac{A_1 \cdot x + B_1}{x^2 + bx + c} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

Wieder erhält man bei Koeffizientenvergleich mit $p(x)$ ein LGS für die unbekannten Koeffizienten.

11.4 Anwendungen des Integrierens

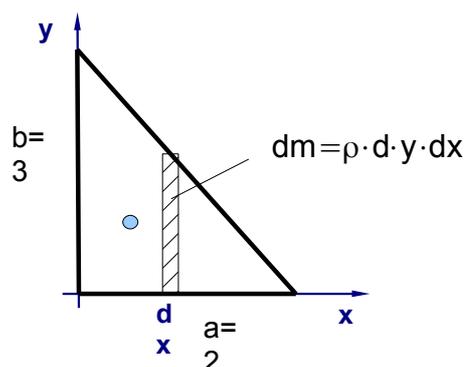
11.4.1 Berechnung von Massen-Schwerpunkten

Die Formel zur Berechnung des Schwerpunktes von n starr verbundenen Teilkörpern mit bekannten Massen m_i und bekannten Teil-Massenschwerpunkten $x_{s_i}, y_{s_i}, z_{s_i}$

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n x_{s_i} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{usw.}$$

setzt voraus, dass das Gesamtsystem aus Teilkörpern mit definierten Teilschwerpunkten und Teilmassen besteht. Ist das nicht der Fall, müssen die Schwerpunktkoordinaten aus bestimmten Integralen ermittelt werden.

Beispiel: Schwerpunkt einer Platte aus homogenem Material der Dichte ρ in Form eines rechtwinkligen Dreiecks konstanter Dicke d und den Katheten $a=2, b=3$ Längeneinheiten. Die Platte soll mit dem rechten Winkel im Ursprung eines kartesischen x - y -Koordinatensystems liegen.



Zerlegt man die Gesamtmasse in infinitesimal kleine rechteckförmige Massenstreifen dm mit der Höhe y und der Breite dx (**Achtung:** dx ist ein infinitesimales Abszissenstück der x -Achse, das „ d “ in dieser Bezeichnung hat **nichts** mit der Dicke d der Platte zu tun!)

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot d \cdot dA = \rho \cdot d \cdot y \cdot dx$$

parallel zur y -Achse, so geht die obige Formel in

$$x_s = \frac{\int_{(m)} x \cdot dm}{\int_{(m)} dm} = \frac{\int_{x=0}^{x=a} \rho \cdot d \cdot x \cdot y \, dx}{\int_{x=0}^{x=a} \rho \cdot d \cdot y \, dx} = \frac{\int_{x=0}^{x=a} x \cdot y \, dx}{\int_{x=0}^{x=a} y \, dx} = \frac{\int_{x=0}^{x=a} x \cdot \left(-\frac{b}{a} \cdot x + b\right) dx}{\int_{x=0}^{x=a} \left(-\frac{b}{a} \cdot x + b\right) dx}$$

über (ρ und d sind Konstanten, die sich heraus kürzen). Die Variable y ist über die Geradengleichung der Hypothense eine Funktion von x . Das Integral im Zähler gibt die mit den Teilschwerpunktkoordinaten x gewichteten Teilmassen, das Integral im Nenner die Gesamtfläche des Dreiecks an.

11.4.2 Berechnung von Trägheitsmomenten für drehende Massen

Die Trägheit eines frei gelagerten Körpers mit der Masse m , auf den eine Kraft F einwirkt, beeinflusst die durch die Kraft hervorgerufene Beschleunigung b gemäß

$$F = m \cdot b$$

Bei drehenden Körpern tritt an die Stelle der Kraft F das Drehmoment M und an die Stelle der linearen Beschleunigung b das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω . Beide Größen sind gemäß

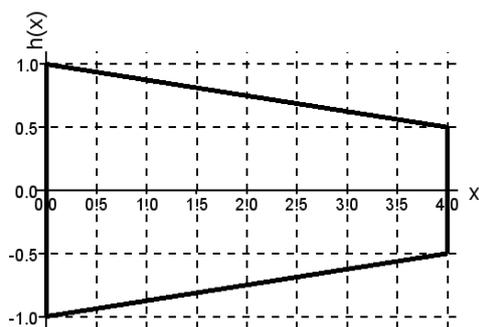
$$M = \Theta \cdot \omega^2$$

über das Trägheitsmoment Θ verknüpft. Die Berechnung von Θ erfolgt nach

$$\Theta = \int_{(m)} r^2 \cdot dm$$

durch Summation (Integration) des Produktes der mit dem Quadrat des Abstandes r von der Drehachse multiplizierten infinitesimalen Massen-Elemente dm über die Gesamtmasse m .

Ein Beispiel findet man im Übungsblatt M_II_01, Aufgabe 1. Hier geht es um das Trägheitsmoment des stark vereinfacht dargestellten Rotorblattes eines Windgenerators:

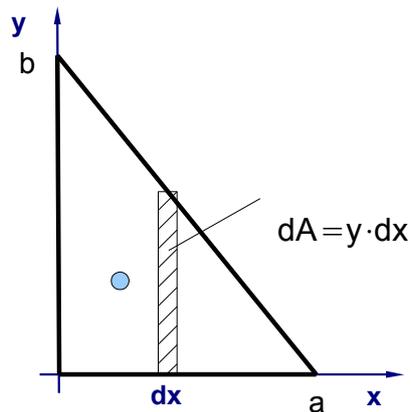


$$\Theta = \int_0^4 x^2 \cdot \rho \cdot 2 \cdot h(x) \cdot d \cdot dx = 2 \cdot \rho \cdot d \int_0^4 x^2 \cdot h(x) dx$$

das sich um die vertikale Achse dreht.

11.4.3 Flächen-Trägheitsmomente zur Berechnung der Balkenbiegung

Biegelinien- und Biegespannungs-Berechnungen an belasteten Balken erfordern die Bestimmung verschiedener Flächenträgheitsmomente für die Balkenquerschnittsflächen A , z. B. bezüglich der Verbiegung um die y -Achse:



$$\text{mit } I_{yy} = \int_{(A)} x^2 dA = \int_{x=0}^a x^2 \cdot y \cdot dx$$

Auch hier lässt sich das Flächenintegral (= Doppelintegral) über dx und dy ($dA = dx \cdot dy$) in ein Einfachintegral über dx umwandeln, wenn man y als Funktion von x ausdrückt:

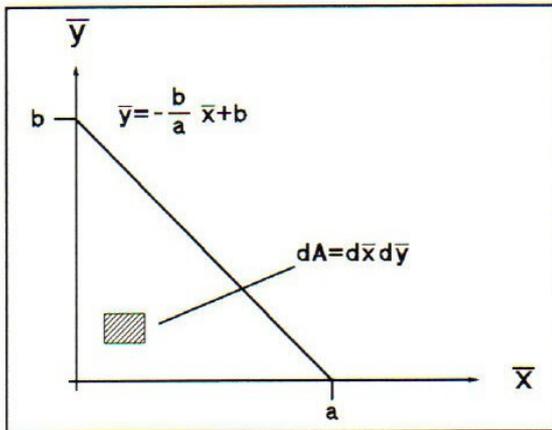
$$y = -\frac{b}{a} \cdot x + b$$

Für das Flächendeviationsmoment (es berücksichtigt die Wirkung eventuell unsymmetrischer Flächenverteilungen um die Biegeachse, bei symmetrischer Verteilung ist es 0)

$$I_{xy} = - \int_{(A)} x \cdot y dA = - \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{-\frac{b}{a} \cdot x + b} y \cdot x dy dx$$

lässt sich keine Vereinfachung erzielen. Daher muss hier das Doppelintegral gelöst werden. Ein Beispiel ist im Folgenden dargestellt:

Berechnung eines Doppelintegrals



Bei "gemischten" Integranden, wie sie im Deviationsmoment

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = -\int_{(A)} \bar{x} \bar{y} dA \text{ vorkommen,}$$

ist die Vereinfachung des Doppelintegrals

über $d\bar{x}d\bar{y} = A$ zu einem nur über $d\bar{x}$ oder nur über $d\bar{y}$ laufenden Einfachintegral nicht möglich. Deshalb muß hier das Doppelintegral

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = -\int_{\bar{x}} \int_{\bar{y}} \bar{x} \bar{y} d\bar{x} d\bar{y} \text{ gelöst werden.}$$

Dazu sind zwei Schritte notwendig:

- 1.) Umordnen der Variablen so, daß ein inneres Integral mit nur einer Variablen entsteht, z.B. nur mit \bar{y} :

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \left(-\int \bar{x} \left[\int \bar{y} d\bar{y} \right] d\bar{x} \right)_{(A)} = -\int_0^a \bar{x} \left[\int_0^{b-\frac{b}{a}\bar{x}} \bar{y} d\bar{y} \right] d\bar{x}$$

- 2.) Festlegen der Integrationsgrenzen; das innere Integral enthält dabei \bar{x} in seiner oberen Grenze, so daß \bar{x} nach Auswertung des inneren Integrals als Variable in das äußere Integral eingeht.

Nun wird zunächst das innere Integral gelöst :

$$\int_0^{b-\frac{b}{a}\bar{x}} \bar{y} d\bar{y} = \left. \frac{\bar{y}^2}{2} \right|_0^{b-\frac{b}{a}\bar{x}} = \frac{\left(b-\frac{b}{a}\bar{x} \right)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} \left(b^2 - \frac{2b^2}{a}\bar{x} + \left(\frac{b}{a}\bar{x} \right)^2 \right)$$

Das Ergebnis ist Bestandteil des äußeren Integrals, das jetzt nur noch die Variable \bar{x} enthält:

$$\begin{aligned} I_{\bar{x}\bar{y}} &= -\int_0^a \bar{x} \frac{1}{2} \left(b^2 - \frac{2b^2}{a}\bar{x} + \frac{b^2}{a^2}\bar{x}^2 \right) d\bar{x} = - \left[\frac{\bar{x}^2 * b^2}{4} - \frac{\bar{x}^3 * b^2}{3a} + \frac{\bar{x}^4 * b^2}{8a^2} \right]_0^a \\ &= -\frac{a^2 * b^2}{24} \end{aligned}$$

11.4.4 Dreifachintegrale zur Volumenberechnung

Siehe Übungsblatt M_II_03, Aufgaben 3 und 6.

11.4.5 Integrale zur Feldberechnung in der Elektrotechnik

Siehe Übungsblatt M_II_03; Aufgabe 7, 8 und 9.

12 Mittelwerte

Mittelwerte sind auf den Integrationsbereich bezogene bestimmte Integrale. Die einzelnen Mittelwerttypen unterscheiden sich nach dem Aufbau des Integranden aus der Funktion $y = f(x)$.

12.1 Arithmetische und quadratische Mittelwerte, Effektivwert

Der einfache Mittelwert der Funktion $y = f(x)$ über den Integrationsbereich von $x = x_1$ bis $x = x_2$ ist

$$\bar{x} = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \cdot \int_{x_1}^{x_2} y dx \quad .$$

Da der Integrand hier nur aus der Funktion y selbst besteht, bezeichnet man den Mittelwert \bar{x} auch als **arithmetischen Mittelwert**.

Wenn $y = f(x)$ z. B. eine zeit-veränderliche Funktion darstellt, etwa eine sinusförmige, symmetrische Spannung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \hat{u} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right)$$

mit der Amplitude \hat{u} , der Periodendauer T für einen vollen Sinusdurchlauf und der Kreisfrequenz ω , dann ist ihr Mittelwert

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{u} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) dt = 0 \quad ,$$

da sich die Beiträge der beiden Halbwellen gerade aufheben.

Anders sieht es beim **quadratischen Mittelwert** \bar{u}^2 aus:

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\hat{u} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \right)^2 dt = \frac{1}{2} \hat{u}^2 \quad .$$

Wegen des quadratischen Integranden ist \bar{u}^2 immer größer als 0 (abgesehen vom technisch uninteressanten Trivialfall, dass der Integrand selbst überall den Wert Null besitzt). Die Wurzel

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{u}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{u}$$

nennt man **Effektivwert** U_{eff} der Spannung $u(t)$, die in der Elektrotechnik große Bedeutung hat.

Arithmetischer und quadratischer Mittelwert sowie der Effektivwert sind ganz allgemein für beliebige Funktionen $x(t)$ definiert. Insbesondere auch dann, wenn es sich bei $x(t)$ um eine statistische Zufallsfunktion handelt (= Rauschen).

Ein weiterer Mittelwert ist die **Streuung** σ . Sie berechnet sich als Wurzel aus dem quadratischen Mittelwert

$$\overline{(u - \bar{u})^2} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (u - \bar{u})^2 dt$$

$$\sigma = \sqrt{\overline{(u-\bar{u})^2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (u-\bar{u})^2 dt} .$$

Wenn man den Verlauf der Funktion $u(t)$ als Summe eines reinen (= mittelwertfreien) Wechselanteils $\tilde{u}(t)$ und eines konstanten Gleichanteils $\bar{u} = \text{const.}$ auffasst, dann ist wegen

$$u(t) = \tilde{u}(t) + \bar{u}$$

die Streuung σ der Effektivwert des reinen Wechselanteils $\tilde{u}(t)$:

$$\sigma = \sqrt{\overline{(u-\bar{u})^2}} = \sqrt{\overline{(\tilde{u} + \bar{u} - \bar{u})^2}} = \sqrt{\overline{\tilde{u}^2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \tilde{u}(t)^2 dt} .$$

Wegen der genannten Mittelwertdefinitionen gilt auch

$$\sigma = \sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} \quad (\text{warum?}).$$

12.2 Mittelwerte zufälliger Ereignisse

Ist $u(t)$ ein zufällig schwankender (= stochastischer) Verlauf, bei dem sich zukünftigen Werte nicht aus den vorhergehenden bestimmen lassen, so stellen die Mittelwerte neben den Minimal- und Maximalwerten u_{\min} und u_{\max} die wesentlichen Parameter zur Beschreibung gemeinsamer Eigenschaften aller Werte dar. Solche zufälligen Verläufe findet man bei technischen Anordnungen häufig, z. B. in der Form von

- Rauschspannungen auf Datenübertragungskanälen
- Rauigkeitsprofilen auf Materialoberflächen
- Verkehrsdichteschwankungen auf Straßen
- Messergebnissen zur Qualitätsprüfung in der Produktfertigung
- Klausurergebnissen

Das Erscheinungsbild ist bei sonst gleichen Mittelwert-Parametern noch von der Art der **Verteilungsdichtefunktion** $p(r)$ der Einzelwerte abhängig. Bei einer Gaußschen **Normalverteilung** (siehe Kapitel ???) erstreckt sich der Wertebereich über

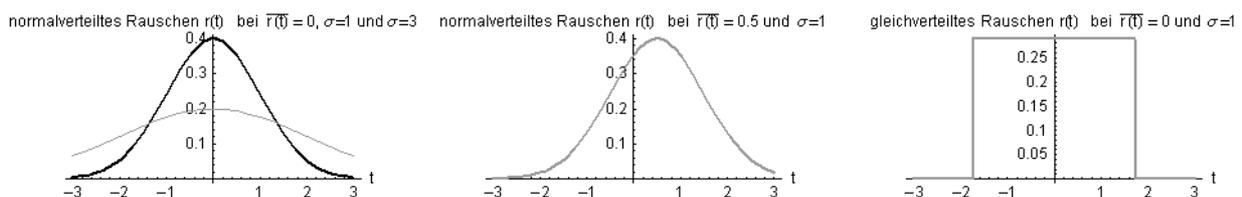
$$-\infty < r_{\text{normal}}(t) < +\infty ,$$

wobei große Werte weniger häufig vorkommen. Bei der **Gleichverteilung** liegen alle Werte in einem endlichen Bereich

$$r_{\min} < r_{\text{gleich}}(t) < r_{\max} ,$$

in dem alle Werte gleich häufig auftreten. Es gibt weitere, technisch bedeutsame Verteilungsdichtefunktionen, auf die hier aber nicht eingegangen wird.

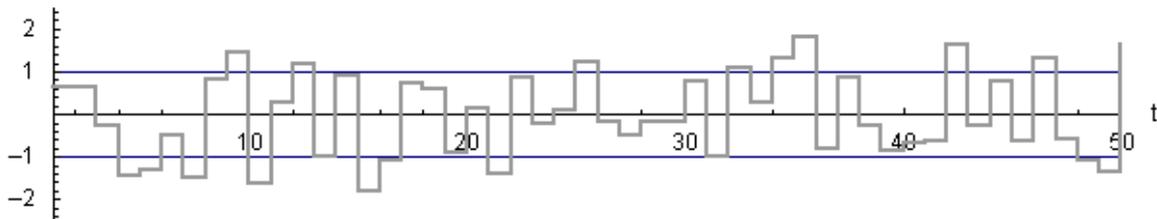
Das folgende Diagramm zeigt die Verteilungsdichte-Funktionen einer mittelwertfreien Normalverteilung, einer Normalverteilung mit Mittelwert 0.5 und eine mittelwertfreie Gleichverteilung, alle mit der Streuung $\sigma = 1$:



Viele zufälligen Ereignisse in der Technik weisen eine Normalverteilung auf. Das folgende

Diagramm zeigt den Verlauf eines zufälligen, normalverteilten, mittelwertfreien Rauschsignals mit der Streuung $\sigma = 1$ (siehe linkes Bild im obigen Diagramm):

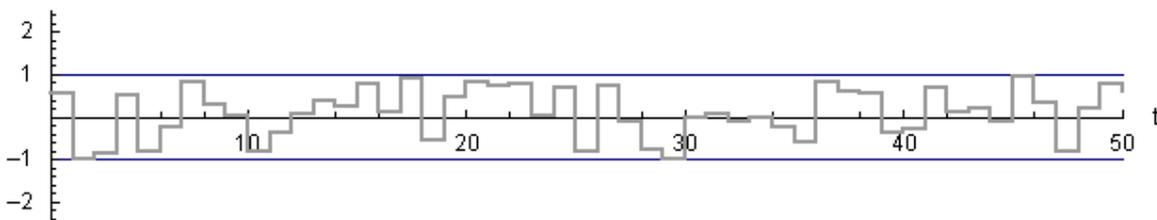
normalverteiltes Rauschen $r(t)$ bei $\bar{r}(t) = 0$ und $\sigma = 1$



Die Begrenzungslinien markieren den **Streubereich** $-\sigma < r_{\text{normal}}(t) < +\sigma$, in dem bei einem normalverteilten Signal etwa 68% aller Werte liegen.

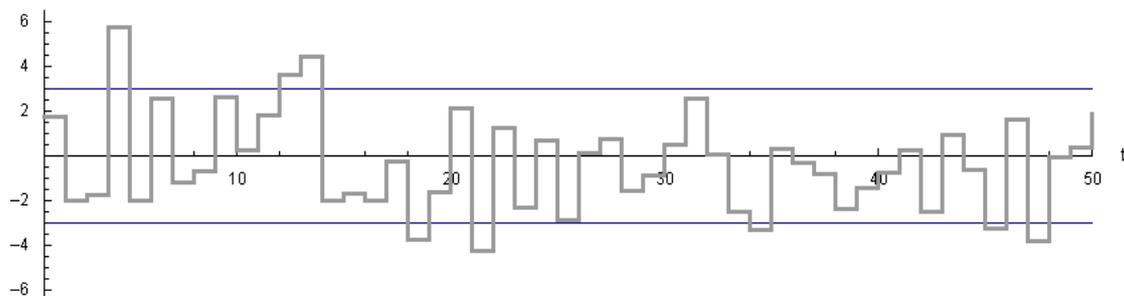
Bei einer mittelwertfreien Gleichverteilung mit $r_{\text{min}} = -1$, $r_{\text{max}} = +1$ und gleicher Streuung $\sigma = 1$ liegen alle Werte im Streubereich:

gleichverteiltes Rauschen $r(t)$ bei $\bar{r}(t) = 0$ und $\sigma = 1$



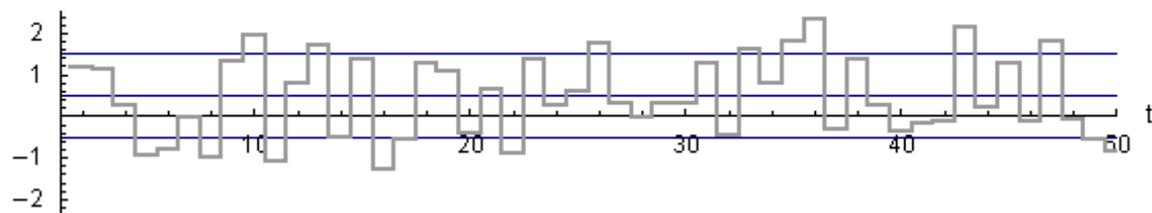
Eine normalverteilte, mittelwertfreie Wertefolge mit $\sigma = 3$ hat einen Verlauf mit entsprechend größerem Streubereich:

normalverteiltes Rauschen $r(t)$ bei $\bar{r}(t) = 0$ und $\sigma = 3$



Ist die Verteilung nicht mittelwertfrei, so verschieben sich bei sonst gleicher Streuung alle Werte um den Betrag des Mittelwertes. Für den oben gezeigten normalverteilten Verlauf sieht das für $\bar{r}(t) = 0.5$ so aus:

normalverteiltes Rauschen $r(t)$ bei $\bar{r}(t) = 0.5$ und $\sigma = 1$



Die mittlere Linie deutet den Mittelwert an. Der Streubereich verschiebt sich ebenfalls um 0.5 Einheiten, behält aber wegen der gleichen Streuung seine Breite.

Da das Verhalten vieler technischer Systeme durch zufällige Einflüsse bestimmt wird (z. B.

Achsenauslenkung eines sich auf einer rauen Fahrbahn bewegendes Autos), ist die Untersuchung mit der Einwirkung von Zufallsgrößen ein wichtiges Hilfsmittel zur Analyse des technischen Verhaltens und zur Ausarbeitung von Lösungen. Diese Zufallsgrößen haben dann auch reale physikalischen Bedeutungen. Z. B. stellt eine zufällige elektrische Störspannung $u(t) = r(t)$, wie sie z. B. auf allen Kanälen zur Datenübertragung unvermeidlich ist (= Rauschen), ein Maß für die von ihr gelieferte mittlere elektrische Leistung dar. Diese Leistung ist dem quadratischen Mittelwert $\overline{r(t)^2}$ proportional, da die elektrische Leistung P sich aus dem Quotienten vom Quadrat der Spannung $\overline{r(t)^2}$ und dem Widerstand R ergibt.

Falls der Mittelwert verschwindet ($\overline{r(t)} = 0$), kann die mittlere elektrische Leistung durch das Quadrat der Streuung (= σ^2) ausgedrückt werden (warum?). Zusammen mit der mittleren Leistung des auf dem Kanal zu übertragenden Nutzsignal $v(t)$ lässt sich der **Störabstand SNR** (= Signal to Noise Ratio)

$$\text{SNR} = \frac{\overline{v(t)^2}}{\overline{r(t)^2}}$$

definieren (siehe Angewandte Informatik I), mit dem sich grundlegende Aussagen zur Fehlerentstehung und Fehlervermeidung treffen lassen.

Zufallswerte können bereits mit den meisten Taschenrechner erzeugt werden (Tasten RND oder RAND). Diese Werte sind oft gleichverteilt und liegen im Bereich von 0 bis 1. Weitاً vielseitiger ist die Herstellung von Zufallswerten mit Hilfe von Mathematikpaketen wie MatLab oder Mathematica. Hier kann man verschiedenste Verteilungsdichte- und Mittelwert-Funktionen wählen.

12.3 Mittelwerte diskreter Zahlenmengen

Im vorigen Kapitel wurden Mittelwerte von Abschnitten stetiger Funktionen definiert. Doch auch für Folgen diskreter Zahlen lassen sich Mittelwerte berechnen, wobei das Vorgehen sehr ähnlich ist. Für eine Folge $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ von n Zahlen gilt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{arithmetischer Mittelwert})$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (\text{quadratischer Mittelwert})$$

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\text{Effektivwert})$$

$$\sigma = \sqrt{\overline{(x-\bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (\text{Streuung = Standardabweichung})$$

Oft erscheint der Ausdruck für die Streuung diskreter Werte in der leicht geänderten Form

$$\sigma^* = \sqrt{\overline{(x-\bar{x})^2}}^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}^* .$$

Der Summenausdruck enthält durch Einbeziehung des Mittelwertes \bar{x} nicht mehr „n“, sondern wegen der Verknüpfung

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow n \cdot \bar{x} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n$$

nur noch „n-1“, denn einer der Werte x_i , z. B. x_n ist mit

$$x_n = n \cdot \bar{x} - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}$$

von den anderen und vom Mittelwert abhängig. Da die Streuung formal aber einen Mittelwert aus unabhängigen Werten bildet, gibt es nicht „n“ sondern nur „n-1“ Teilnehmer, weshalb die Summe durch n-1 zu teilen ist, um eine „gute“ Näherung σ^* an die theoretische Streuung für unendlich viele Werte x_i zu erhalten. Dies wirkt sich jedoch nur bei kleinen Teilnehmerzahlen n aus, da sich für große „n“ beide Faktoren vernachlässigbar unterscheiden.

12.4 Die Autokorrelationsfunktion als Mittelwertfunktion

Bei technischen Anordnungen, ist es oft von Interesse, wie stark die auf diese einwirkenden Größen untereinander in Beziehung stehen. Bei **deterministischen** (nicht zufälligen) Größen wird diese innere Abhängigkeit durch die Funktion (z. B. Sinusfunktion) gegeben. Bei zufälligen Größen x_i ist dies zunächst nicht offensichtlich. Im Idealfall besteht hier überhaupt keine Abhängigkeit, die Werte sind dann **statistisch unabhängig** und man kann aus vorangegangenen Werten keine Aussage auf zukünftige treffen. Dies sollte z. B. bei der Ziehung der Lottozahlen so sein.

Gerade in technischen Anordnungen trifft dies aber nicht immer zu, schon bedingt durch die physikalisch erzwungene **Stetigkeit von Energieänderungen**: Ein Fahrzeug etwa kann seine Geschwindigkeit nur allmählich ändern, da hierbei Energie zu- oder abgeführt werden muss. Dann unterscheiden sich die Geschwindigkeitswerte in kurzen Zeitabständen nur geringfügig und es besteht eine starke Abhängigkeit, die sich erst bei größeren Abständen verkleinert.

Um ein Maß für diese Abhängigkeiten zu erhalten, eignet sich die Autokorrelationsfunktion (= AKF) einer Wertefolge x_i . Sie wird mit $\phi_{xx}(k)$ bezeichnet. Dabei wird die Folge mit ihrer um die Variable k zyklisch verschobenen Kopie verglichen. Die Rechenvorschrift ist im diskreten Fall bei n Werten:

$$\phi_{xx}(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_{i+k} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n-1$$

„Zyklisch“ bedeutet, dass bei Verschiebung um eine Stelle nach rechts der ganz rechts stehende Wert den Platz des ganz linken einnimmt usw. Die Folge rotiert also „im Kreis“. Ein Beispiel für eine Folge mit 7 Werten:

Ohne Verschiebung (k = 0):

Wertefolge	1	1	1	-1	1	-1	-1	
Kopie für k = 0	1	1	1	-1	1	-1	-1	Summe
Produkte	1	1	1	1	1	1	1	7

Verschiebung um eine Stelle nach rechts (k = 1):

Wertefolge	1	1	1	-1	1	-1	-1	
Kopie für k = 1	-1	1	1	1	-1	1	-1	Summe
Produkte	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1

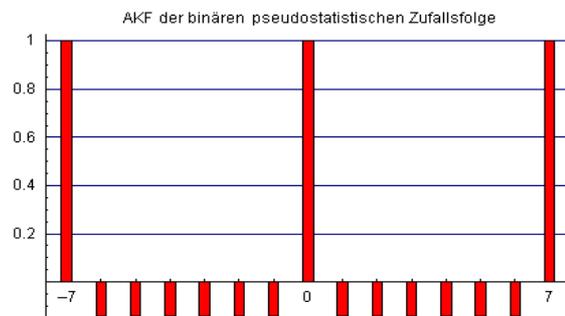
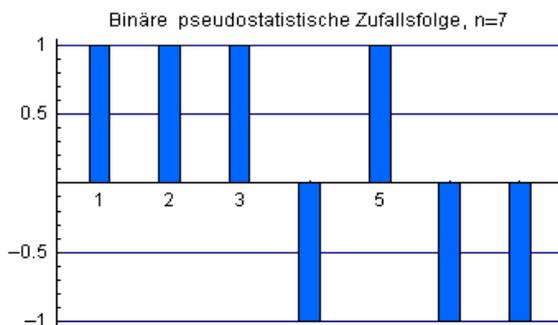
Verschiebung um zwei Stellen nach rechts: (k = 2):

Wertefolge	1	1	1	-1	1	-1	-1	
Kopie für k = 1	-1	-1	1	1	1	-1	1	Summe
Produkte	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1

Bei $k = \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots$ usw. wiederholen sich die Summenwerte. Außerdem ist die AKF eine gerade Funktion mit

$$\phi_{xx}(k) = \phi_{xx}(-k) \quad (\text{anhand des obigen Beispiels nachprüfen!})$$

Die beiden Diagramme zeigen die Wertefolge selbst (hier eine **PRBS** Folge = Pseudo Random Binary Series, siehe auch Kapitel 4 in „Grundkurs Codierung“) und ihre AKF, wobei die völlig **unterschiedliche** Bedeutung und Bezifferung der Achsen zu beachten ist:



Die AKF verläuft also spiegelsymmetrisch zur Achse $k = 0$ (y-Achse). Man braucht sie daher nicht gesondert für negative Werte berechnen:

$$\phi_{xx}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_{i+k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Bei $\phi_{xx}(0)$ handelt es sich einfach um den quadratischen Mittelwert der Folge. Dieser ist immer positiv und stellt zugleich den größten Wert der AKF dar, der von anderen nicht übertroffen werden kann. Je kleiner die übrigen Werte ausfallen, desto geringer ist der innere Zusammenhang (= **Korrelation**) der Folgenglieder. Die als Beispiel gewählte Folge zeigt mit

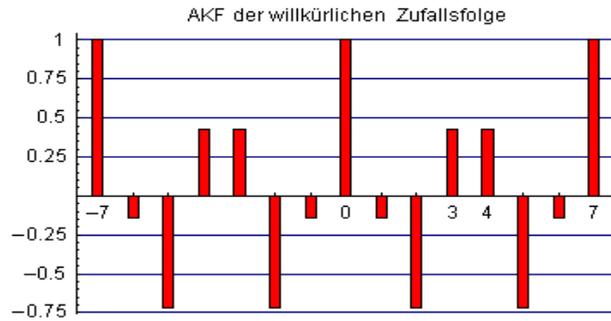
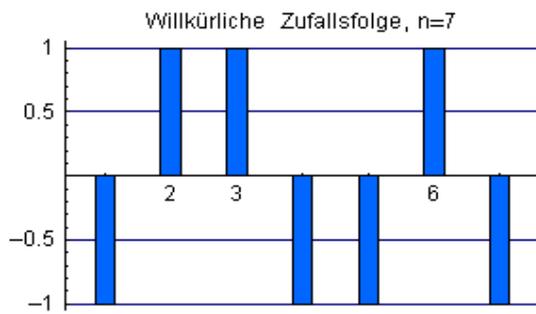
$$\phi_{xx}(k) = -\frac{1}{7} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, 6$$

einen nur sehr schwachen Zusammenhang ihrer Teile. Man könnte die Werte daher als brauchbare Ergebnisse für einen **zweiwertigen Würfel** nehmen (Münzwurf).

Solche „glatten“ AKFs sind eine Besonderheit der PRBS-Signale und nicht selbstverständlich. Man erkennt dies, wenn man die AKF irgendeiner willkürlich ausgedachten Wertefolge bildet, z. B.

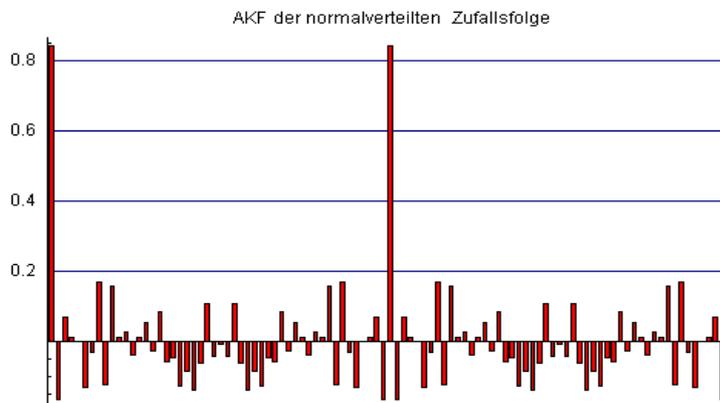
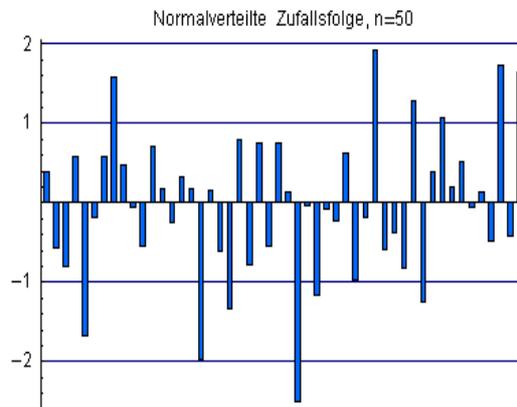
$$x = \{-1, +1, +1, -1, -1, +1, -1\}$$

Die Diagramme zeigen, dass schon eine kleine Veränderung in der Reihenfolge gegenüber vorher eine deutliche Veränderung der AKF bewirkt:



Die einzelnen Werte der Folge sind hier untereinander stärker korreliert, als beim pseudostatistischen Binärsignal oben.

Nimmt man $n = 50$ mittelwertfreie, normalverteilte Zufallsereignisse x_i , so sehen die beiden Diagramme folgendermaßen aus:



Die Werte der AKF für $k \neq 0$ zeigen, dass die Wertefolge ebenfalls nur schwach korreliert ist.

12.5 Die Kreuzkorrelationsfunktion als Mittelwertfunktion

Liegen zwei verschiedene Wertefolgen x_i und y_i vor, so können diese auf ähnliche Weise korreliert werden wie bei der AKF. Die Rechenvorschrift ist dann durch die Kreuzkorrelationsfunktion $\phi_{xy}(k)$ gegeben:

$$\phi_{xy}(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_{i+k} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n-1$$

Die KKF zeigt im Allgemeinen **keine** Spiegel- oder Punkt-Symmetrien, so dass zu ihrer

vollständigen Bestimmung auch die negativen Werte von k notwendig sind. Allerdings gilt die Vertauschungsregel

$$\phi_{xy}(k) = \phi_{yx}(-k) \quad (\text{nachweisen!})$$

Mithilfe der KKF lässt sich prüfen, ob zwei Wertefolgen „innerlich“ zusammenhängen. Gezielt lässt sich das etwa in der Filtertechnik nutzen. Wenn z. B. ein cosinusförmiges Signal von einer zufälligen Störgröße $r(t)$ überlagert wird und die Cosinus-Funktion wegen der Stärke von $r(t)$ nicht mehr erkennbar ist, kann man diese durch Kreuzkorrelation mit einer Cosinus-Funktion gleicher Periodendauer aus dem gestörten Summensignal sichtbar machen. Dazu wird die Folge

$$x_i = \hat{a} \cdot \cos(\omega \cdot i \cdot \Delta t) + r(i \cdot \Delta t)$$

mit den Folgewerten einer Cosinus-Funktion gleicher Periodendauer

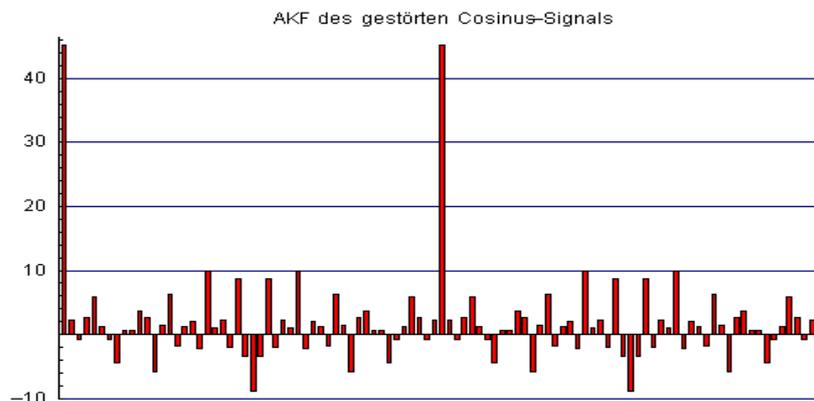
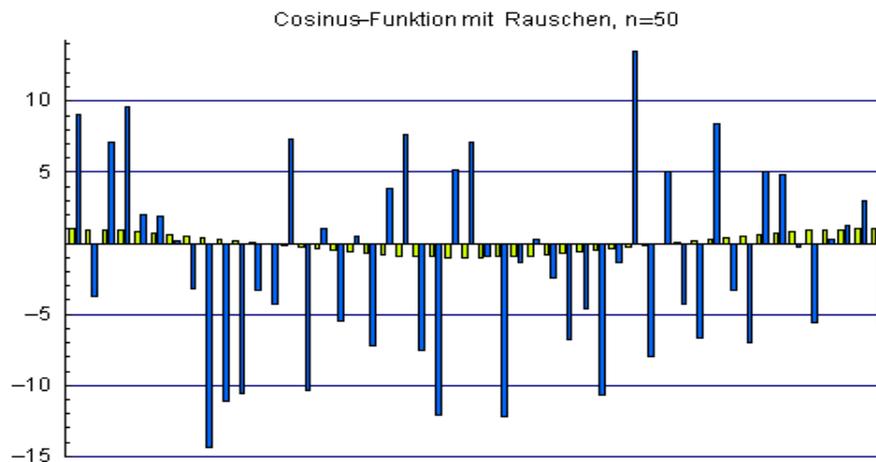
$$y_i = \cos(\omega \cdot i \cdot \Delta t)$$

kreuzkorreliert:

$$\phi_{xy}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_{i+k} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n-1$$

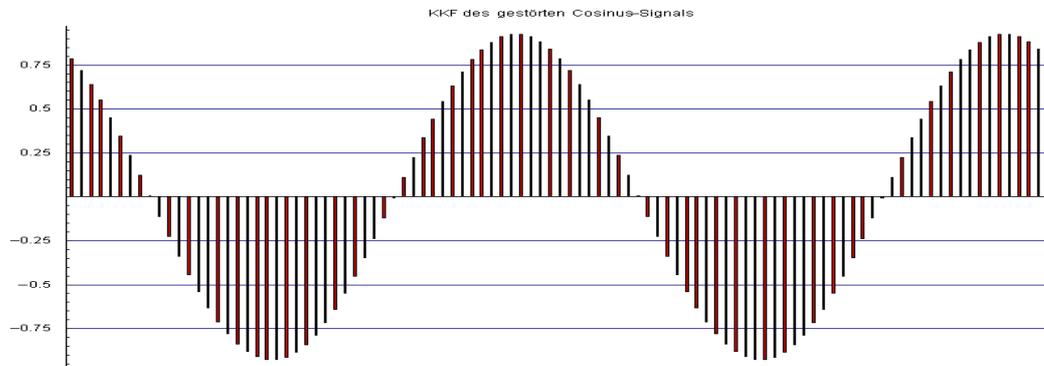
$$\phi_{xy}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\hat{a} \cdot \cos(\omega \cdot i \cdot \Delta t) + r(i \cdot \Delta t)] \cdot \cos(\omega \cdot (i+k) \cdot \Delta t)$$

Wenn die Störsignale $r(t)$ statistisch unabhängig von der Cosinus-Funktion und mittelwertfrei sind, mitteln sie sich in der KKF heraus. Diese zeigt dann bis auf Reste nur noch die Cosinus-Funktion selbst – ein Filterergebnis, was sich gut zum Entstören eignet. Im folgenden Beispiel wurde ein Cosinus-Signal mit einem starken, mittelwertfreien Rauschen ($\sigma = 6$) gestört. Das kleine Cosinus-Signal selbst ist zum Vergleich mit eingetragen:

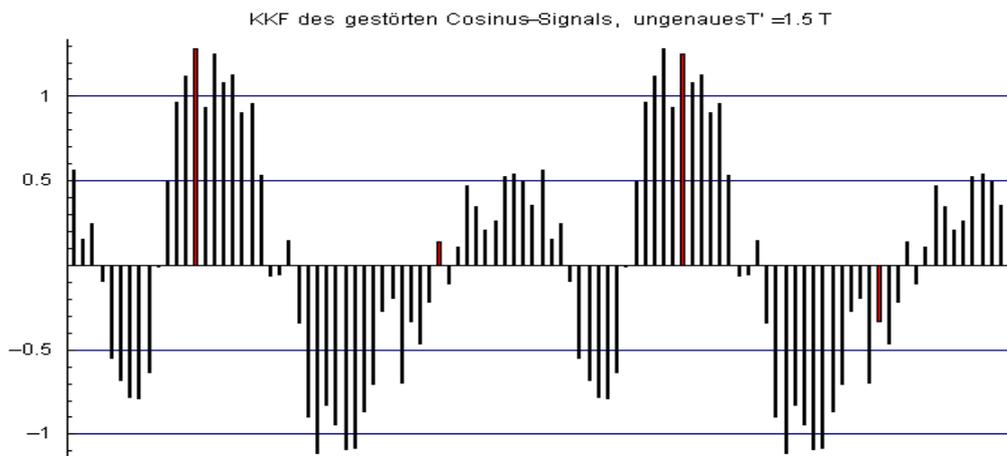


Die AKF zeigt eine geringe Korrelation der Messwerte:

Wird nun das verrauschte Cosinus-Signal mit einem Cosinus-Signal gleicher Periodendauer kreuzkorreliert, so zeigt sich im Verlauf der KKF dieses Signal beinahe störungsfrei, wie das nächste Diagramm darstellt. Der Grund liegt darin, dass sich in jedem Berechnungsschritt der KKF die insgesamt mittelwertfreien Rauschanteile weitestgehend herausheben:



Allerdings muss dazu die Periodendauer T bekannt sein. Wird nur ein ungenauer Wert T' in der KKF verwendet, verschlechtert sich das Ergebnis erheblich. Bei $T' = 1.5 T$, also bei um 50% längerer Periodendauer sieht die KKF zum Beispiel so aus:



Es können also mit Hilfe der KKF bei entsprechendem Rechenaufwand und unter Verwendung geeigneter „Masken-Funktionen“ (wie hier der Cosinus-Funktion) Filter-Effekte realisiert werden. Diese Besonderheit der KKF wird in abgewandelter Form auch bei den Fourier-Reihen angewendet.

12.6 Fourier-Reihen als Spezialfall einer Kreuzkorrelationsfunktion

Fourier hat ein Verfahren entwickelt, was heute als bedeutende Grundlage vieler Lösungen zu technischen Aufgabenstellungen dient. Die Idee besteht darin, periodische Funktionen als Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen auszudrücken. Es handelt sich dabei um eine Reihenentwicklung, die deutliche Verwandtschaft zu den Potenzreihen nach Taylor zeigt. Während letztere aber durch Summen von Polynomen ansteigender Ordnung gebildet werden, sind es beim Fourier-Verfahren Sinus- und Cosinusfunktionen mit ansteigenden Frequenzen.

Ist $y = f(x)$ eine im Punkt $x = a$ stetig differenzierbare Funktion, d. h., ist sie in $x = a$ beliebig oft ableitbar, so lässt sie sich um den Punkt $x = a$ herum in eine Potenzreihe entwickeln, siehe Kapitel ???.

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} + f''(a) \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a) \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} \dots + \text{Rest}$$

Ist die Funktion $y = f(t)$ jedoch periodisch mit T , also $y(t) = y(t + T)$, dann lässt sie sich in folgende Fourier-Reihe entwickeln:

$$y(t) = a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos(v \omega t) + b_v \sin(v \omega t)) \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} .$$

Die Frequenzen $v \cdot \omega$ sind hierbei ganzzahlige Vielfache (Oberschwingungen) der Grundfrequenz ω . Außerdem darf $y(t)$ im Gegensatz zu den Anwendungsvoraussetzungen für Taylor-Reihen eine endliche Zahl von Unstetigkeitsstellen besitzen.

Wie bei den Taylor-Reihen kommt es auch hier entscheidend auf die geeigneten Koeffizienten a_v und b_v an. Diese berechnen sich aus folgenden Mittelwerten über eine Periode T :

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T y(t) dt, \quad b_0 = 0$$

$$a_v = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \cos(v \omega t) dt$$

$$b_v = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \sin(v \omega t) dt$$

Gemäß der oben stehenden Reihe sind die Koeffizienten für $v \geq 1$ also die **Amplitudenwerte** der zugehörigen Sinus- und Cosinus-Schwingungen, der Koeffizient a_0 stellt den arithmetischen Mittelwert der Funktion $y(t)$ dar. $y(t)$ lässt sich also entweder vollständig

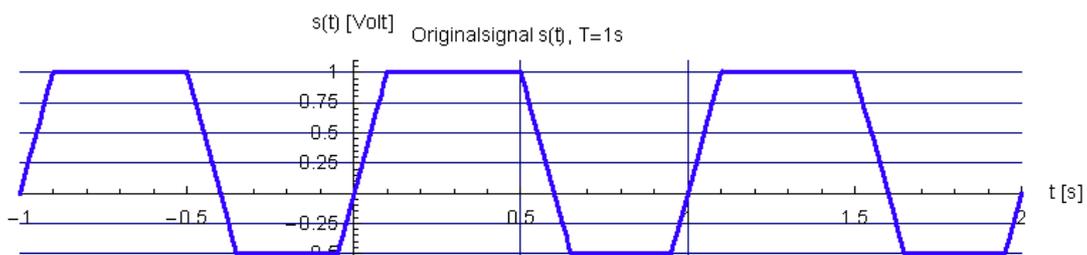
- als Zeitfunktion in Form einer unendlichen Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen
- oder in Form des **Frequenzspektrums** der Amplitudenwerte a_v , b_v beschreiben.

Man kann daher je nach Eignung die eine oder andere Darstellung wählen, was sich für technische Aufgabenstellungen oft als sehr hilfreich erweist. Fourier-Reihen bilden die Grundlage für einige daraus abgeleitete Verfahren, welche z. B. in der

- Nachrichtentechnik (Tief-, Band- und Hochpassfilter)
- Bilddatenkompression (JPEG, .jpg)
- Akustikdatenkompression (MPEG, .mp3)

und anderen eingesetzt werden. Im Alltag sind wir von Verfahren umgeben, die die Technik der Fourier-Reihen – allerdings in effektiveren Varianten – nutzen, siehe nächstes Kapitel zur diskreten Fourier-Transformation DFT.

Das folgende Beispiel soll die Wirkungsweise der Fourierreihen-Technik zeigen. Ein Mikrocontroller liefert ein Spannungssignal $s(t)$ mit der Periodendauer $T = 1s$:



Dieses periodische Signal kann durch eine unendliche Fourier-Reihe (Fourier-Summe) aus Cosinus- und Sinus-Funktionen dargestellt werden, genauer durch

- einen arithmetischen Mittelwert a_0
- eine Cosinus-Grundschiwingung mit der Periodendauer $T = 1\text{ s}$ oder der Frequenz $f=1\text{ Hz}$

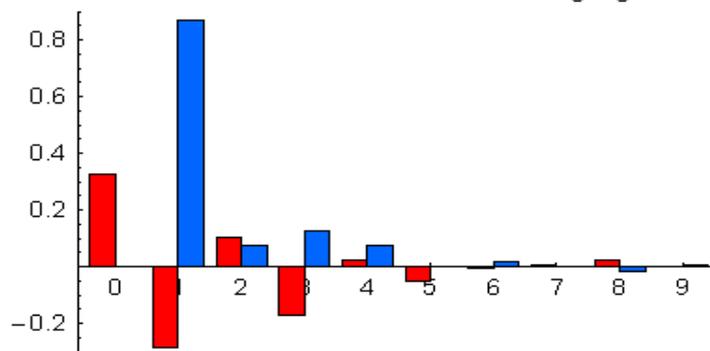
$$a_1 \cdot \cos\left(\frac{2\text{Pi}}{T} \cdot t\right)$$
- unendlich viele weitere Cosinus-Oberschwingungen mit Vielfachen der Grundfrequenz

$$a_v \cdot \cos\left(v \cdot \frac{2\text{Pi}}{T} \cdot t\right)$$
- eine Sinus-Grundschiwingung mit der Periodendauer $T = 1\text{ s}$ oder der Frequenz $f=1\text{ Hz}$

$$b_1 \cdot \sin\left(\frac{2\text{Pi}}{T} \cdot t\right)$$
- unendlich viele weitere Sinus-Oberschwingungen mit Vielfachen der Grundfrequenz

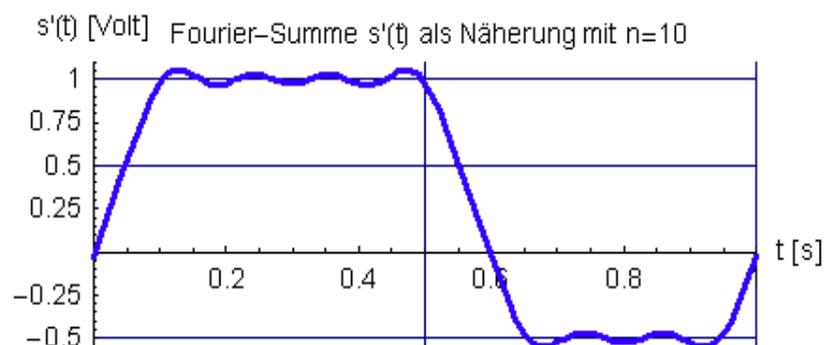
$$b_v \cdot \sin\left(v \cdot \frac{2\text{Pi}}{T} \cdot t\right)$$

Fourier-Koeffizienten der Cos- und Sin-Schwingungen bei $n = 10$

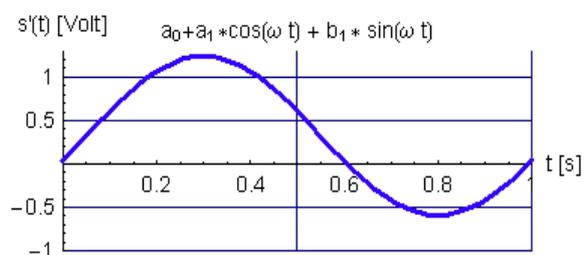
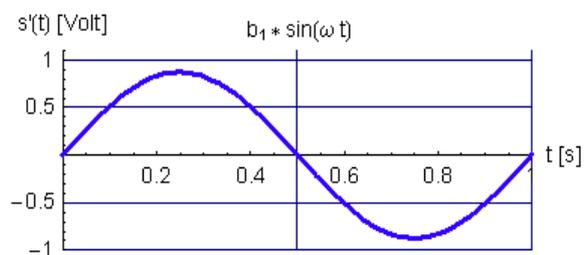
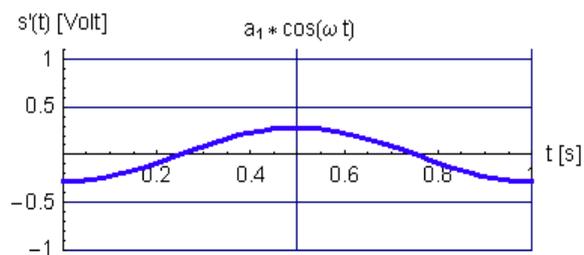
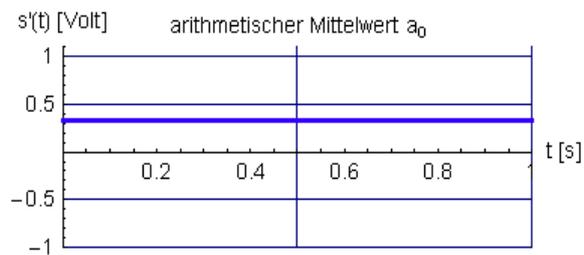


Technisch wird man sich immer auf diejenige endliche Anzahl von Oberschwingungen beschränken, mit der bereits eine brauchbare Näherung für $s(t)$ zu erzielen ist. Bei $n = 10$ sieht das Spektrum der Koeffizienten so aus:

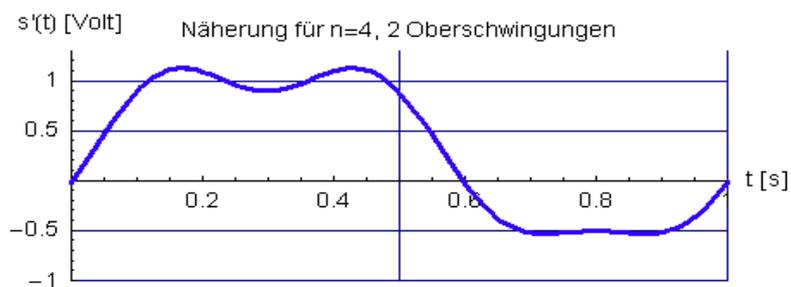
Die Koeffizienten a_v sind rot dargestellt, die Koeffizienten b_v blau. Man sieht, dass es berechtigt erscheint, nur bis etwa $n = 10$ zu gehen, da die Beträge stark abklingen. Die damit gebildete Fourier-Summe bringt dieses Ergebnis:



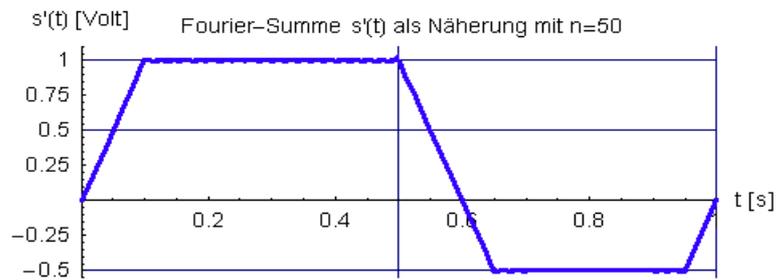
Wie sich die Näherungen aus den einzelnen Summentermen entwickeln, lässt sich anhand der ersten Koeffizienten nachvollziehen:



Wegen der hier nur 3 berücksichtigten Koeffizienten a_0, a_1, b_1 ist allerdings die Näherung noch nicht zu erkennen. Nimmt man die beiden Terme der ersten und zweiten Oberschwingungen dazu, also $a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, lässt sich die Näherung bereits erahnen:



Bei $n = 50$ ist die Näherung fast perfekt, wobei allerdings der Rechenaufwand auch beträchtlich anwächst:



12.7 Diskrete Fourier-Transformation (DFT und FFT)

Unter folgenden Voraussetzungen lässt sich aus dem Verfahren der Fourier-Reihen ein Sonderfall ableiten, der für den praktischen Einsatz besondere Bedeutung hat, weil der Rechenaufwand erheblich sinkt:

- Die Funktion $y(t)$ enthält im Intervall $0 \leq t \leq T$ nur endlich viele Schwingungsanteile N , d. h., sie ist **bandbegrenzt** und besteht damit aus
 - einem Gleichanteil a_0 ,
 - einer Grundschwingung $a_1 \cdot \cos(\omega t)$ und $b_1 \cdot \sin(\omega t)$
 - endlich vielen Oberschwingungen $a_\nu \cdot \cos(\nu \cdot \omega t)$ und $b_\nu \cdot \sin(\nu \cdot \omega t)$ mit $\nu = 2, 3, \dots, N$.

In realen Fällen liegen diese Voraussetzungen oft vor oder lassen sich herstellen. Ein mp3-Player etwa hat einen Equalizer = spezielles Frequenzfilter, der u. a. hohe Frequenzanteile „abschneiden“ kann.

- Die Funktion kann, **muss aber nicht** periodisch mit T sein.
- Das Intervall wird im Intervall $0 \leq t \leq T$ in $2N$ gleiche Abschnitte der Länge ΔT unterteilt.
- Der Abstand beträgt dann $\Delta T = \frac{T}{2N}$
- Es werden beginnend bei $t = 0$ insgesamt $2N$ **Abtastwerte** aus $y(t)$ im Abstand ΔT gemessen. Diese Werte sind also $y(i \cdot \Delta T)$ für $i = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$

Dann lassen sich die $2N$ Koeffizienten a_ν und b_ν (= Amplituden) aus den $2N$ Abtastwerten $y(i \cdot \Delta T)$ der Funktion $y(t)$ bestimmen. Die Mathematik zeigt, dass man $2N$ Unbekannte im Allgemeinen aus $2N$ Gleichungen berechnen kann (genauer: dies ist eine notwendige Bedingung, die unter bestimmten Voraussetzungen auch hinreicht).

Die benötigten Gleichungen sind:

$$a_\nu = \frac{1}{2N} \cdot \sum_{i=0}^{2N-1} y(i \cdot \Delta T) \cos\left(\frac{\nu \cdot i \cdot \pi}{N}\right) \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$b_\nu = \frac{1}{2N} \cdot \sum_{i=0}^{2N-1} y(i \cdot \Delta T) \sin\left(\frac{\nu \cdot i \cdot \pi}{N}\right)$$

Dabei ergeben sich folgende Sonderfälle

- a_0 = Mittelwert aus den $2N$ Abtastwerten
- $b_0 = 0$

- $b_N = 0$.

Man berechnet also insgesamt $2N$ Koeffizienten:

- $(N+1)$ Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$ und
- $(N-1)$ Koeffizienten b_1, b_2, \dots, b_{N-1} .

Der Nutzen liegt darin, dass die Funktion $y(t)$ entweder über ihre $2N$ Abtastwerte im Abstand ΔT oder über ihre $2N$ Koeffizienten vollständig beschrieben ist, da sich die **Abtastwerte** als Summe aus

$$y(i \cdot \Delta T) = a_0 + 2 \cdot \sum_{v=1}^N \left[a_v \cdot \cos\left(\frac{i \cdot v \pi}{N}\right) + b_v \cdot \sin\left(\frac{i \cdot v \pi}{N}\right) \right]$$

berechnen lassen. Die DFT hat damit die wichtige Eigenschaft einer umkehrbaren Transformation.

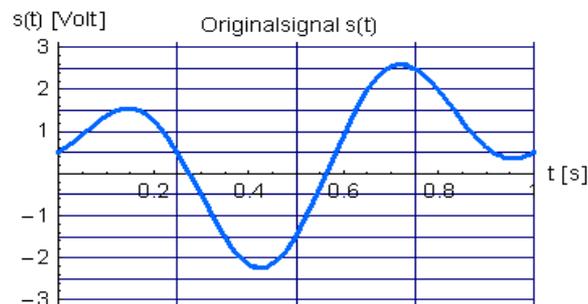
Hinweis: Die Umkehrbarkeit bezieht sich auf die $2N$ Abtastwerte und die $2N$ Koeffizienten. Berechnet man über die obige Summenformel jedoch Werte **zwischen** den Abtastzeitpunkten, stimmen diese im allgemeinen **nicht** mit den Werten der Originalfunktion überein.

Oft ist für die Beurteilung und Analyse eines Signals $y(t)$ ausschließlich das durch die Koeffizienten a_v und b_v gegebene **Amplituden- oder Frequenzspektrum** geeignet. Für den Zweck einer zufriedenstellenden Datenkompression eines Bildsignals (= Pixel einer Digitalkameraaufnahme) sind z. B. die hochfrequenten Anteile (= hohe Oberwellenamplituden nahe $v=N$) weniger wichtig als die Grundwelle und ihre nächsten Oberschwingungen. Wenn man die hohen Oberschwingungen im Extremfall weg lässt, behält man die wesentlichen Bildinformationen, benötigt aber weniger Speicherplatz. Das ist die Idee der JPEG-Kompression. Sie lässt sich **gezielt** nur durchführen, wenn zuvor die beschriebene Berechnung der Koeffizienten mit Hilfe der DFT gemacht wurde.

Übungsaufgabe: Ein bandbegrenzttes Signal $s(t)$ besteht aus

- einem Gleichanteil (= arithmetischer Mittelwert) von 0.5 Volt
- einer Cosinus-Grundschiwingung der Frequenz 1 Hz mit der Amplitude +1.0 Volt
- einer Cosinus-Oberwelle doppelter Frequenz mit der Amplitude -1.0 Volt
- einer Sinus-Grundschiwingung der Frequenz 1 Hz mit der Amplitude -1.0 Volt
- einer Sinus-Oberwelle doppelter Frequenz mit der Amplitude +1.0 Volt

Das Summensignal $s(t)$ liegt über einen Zeitraum von 1s vor und zeigt diesen Verlauf:



Während dieser Zeit können z. B. mit Hilfe des Analog-Digital-Wandlers eines Mikrocontrollers in wählbaren Zeitabständen ΔT Messungen an $s(t)$ gemacht werden.

Hinweis: Man kann das Signal so interpretieren, als wären Gleichanteil und Amplituden den Bitwerten einer mit $s(t)$ zu übertragenden Information zugeordnet. Man nennt diese Zuordnung dann Modulation des Signals $s(t)$ mit den Amplitudenwerten der Teilschwingungen.

Fragen:

- Wie viele Abtastwerte müssen gemessen werden (z. B. mit Hilfe des AD-Wandlers eines Mikrocontrollers), um die Frequenzanteile des Summensignals berechnen zu können? Hinweis: Nach dem **Abtasttheorem von Shannon** muss das Signal mit der höchsten Frequenz mindestens zweimal abgetastet werden, um identifiziert werden zu können, Nimmt man mehr Messungen vor, würden sich bei der Fourieranalyse die Amplituden der zu hohen Frequenzanteile als Null ergeben. Sie schaden zwar nicht, erhöhen aber unnötig den Rechenaufwand.
- In welchem zeitlichen Abstand ΔT müssen die Abtastwerte gemessen werden?
- Wie viele Koeffizienten der DFT lassen sich aus den Abtastwerten bestimmen?
- Berechnen Sie aus den Abtastwerten die Koeffizienten der DFT.
- Berechnen Sie aus der diskreten Fourier-Summe wieder die Abtastwerte.
- Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) und e).

Hinweis: Ist die Anzahl N der Abtastwerte eine Potenz von 2, also $N = 2^p$ ($p = 1, 2, 3, \dots$), dann gibt es ein besonders effektives Berechnungsverfahren für die Fourier-Koeffizienten. Es stellt einen Sonderfall der DFT dar und ist als **Fast Fourier Transform (= FFT)** bekannt. Für den praktischen Einsatz wird meistens die FFT verwendet.

12.8 Mittelwertbildung zur Fehler-Verringerung mithilfe der Regression

In der Messtechnik hat man oft die Aufgabe, die Parameter eines funktionalen Zusammenhangs zwischen Messgrößen zu ermitteln. Z. B. können aus Messungen von Strom und Spannung am Verbraucherwiderstand einer Ersatzspannungsquelle die beiden Parameter Leerlaufspannung U_0 und Innenwiderstand R_i berechnet werden. Hierzu sind zwei Messungen erforderlich. Der physikalische Zusammenhang wird durch die Maschengleichung

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

beschrieben. Dies stellt eine Geradengleichung der Form $y = m \cdot x + n$ mit dem Strom I als unabhängiger und U als abhängiger Variabler dar. Mit zwei Messwertpaaren (U_1, I_1) und (U_2, I_2) lassen sich im Idealfall zwei Gleichungen bilden, aus denen die beiden gesuchten Parameter U_0 und R_i bestimmbar sind:

$$U_1 = U_q - R_i \cdot I_1$$

$$U_2 = U_q - R_i \cdot I_2$$

Unter realen Verhältnissen werden die Messungen aber mit unvermeidlichen Fehlern behaftet sein, so dass das Ergebnis ungenau ist. Dieser Einfluss lässt sich durch unbekannte Fehler e_i berücksichtigen, die z. B. durch Ungenauigkeiten bei der Spannungs- und Strom-Messung entstehen:

$$U_1 = U_q - R_i \cdot I_1 + e_1$$

$$U_2 = U_q - R_i \cdot I_2 + e_2$$

Wenn man die Fehler ignoriert, erhält man fehlerhafte Ergebnisse für die Parameter. Unter der Annahme, dass die Fehler zufällig auftreten und über eine größere Anzahl betrachtet den Mittelwert Null aufweisen, kann man aber weitere Messungen durchführen, so dass mehr Gleichungen als Unbekannte vorhanden sein werden:

$$U_3 = U_q - R_i \cdot I_3 + e_3$$

$$U_4 = U_q - R_i \cdot I_4 + e_4$$

....

$$U_N = U_q - R_i \cdot I_N + e_N$$

Würde man je zwei Gleichungen hieraus zur Bestimmung der Unbekannten verwenden, erhielte man jedes Mal ein anderes Ergebnis, je nachdem, wie groß die Fehler sind. Es ist also die Frage, wie sich alle Gleichungen so zusammenfassen lassen, dass sich die Fehler wenigstens teilweise aufheben. Das System ist allerdings **überbestimmt** und kann mathematisch nicht direkt gelöst werden.

Hinweis: In der Mechanik bedeutet ein überbestimmtes System, dass mehr Unbekannte als Gleichgewichtsbedingung vorhanden sind. Es wird also aus der Sicht der Anzahl der GGBs darauf geschaut, während die Blickrichtung im vorliegenden Fall von der Anzahl der Unbekannten auf die Zahl der Gleichungen geht.

Die Lösung erhält man mit einem „Trick“: Man bildet den **Mittelwert der quadratischen Fehler** und sucht diejenige Lösung für die Parameter, für die dieser Mittelwert minimal wird. Dies stellt eine **Extremwertaufgabe** dar. Dazu werden die Gleichungen zunächst nach den Fehlertermen aufgelöst und quadriert:

$$e_1 = U_1 - U_q + R_i \cdot I_1 \rightarrow$$

$$e_1^2 = (U_1 - U_q + R_i \cdot I_1)^2 = U_1^2 + U_q^2 + (R_i \cdot I_1)^2 - 2U_1 U_q + 2U_1 R_i I_1 - 2U_q R_i I_1$$

.....

.....

$$U_N = U_q - R_i \cdot I_N + e_N \rightarrow$$

$$e_N^2 = (U_N - U_q + R_i \cdot I_N)^2 = U_N^2 + U_q^2 + (R_i \cdot I_N)^2 - 2U_N U_q + 2U_N R_i I_N - 2U_q R_i I_N$$

Der quadratische Mittelwert der Fehler berechnet sich dann aus

$$\bar{e}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2 = \frac{1}{N} [(U_1 - U_q + R_i \cdot I_1)^2 + \dots + (U_N - U_q + R_i \cdot I_N)^2]$$

Die besten Schätzwerte \hat{U}_q , \hat{R}_i für die beiden unbekannt Parameter U_q , R_i erwartet man, wenn der quadratischen Mittelwert ein Minimum annimmt. Man muss also diejenigen Schätzwerte \hat{U}_q , \hat{R}_i ermitteln, für die das erreicht wird. Dazu wird der obige Ausdruck **partiell** nach U_q und R_i abgeleitet und Null gesetzt. Die partielle Ableitung erfolgt genauso wie die normale Ableitung, als Variable erscheint aber nur die Größe, nach der abgeleitet wird, alle anderen sind als Konstante zu betrachten. Mit Hilfe der **Kettenregel** erhält man:

$$\frac{\partial \bar{e}^2}{\partial U_q} = \frac{1}{N} [2(U_1 - U_q + R_i \cdot I_1) \cdot (-1) + \dots + 2(U_N - U_q + R_i \cdot I_N) \cdot (-1)] = 0$$

$$\frac{\partial \bar{e}^2}{\partial R_i} = \frac{1}{N} [2(U_1 - U_q + R_i \cdot I_1) \cdot I_1 + \dots + 2(U_N - U_q + R_i \cdot I_N) \cdot I_N] = 0$$

Man erhält ein System aus zwei linearen Gleichungen für zwei Unbekannte. Nach einigen Zwischenrechnungen (**Übungsaufgabe !**) ergeben sich als Lösungen Ausdrücke von Mittelwerten:

$$\hat{R}_i = \frac{-\bar{U}_i \cdot \bar{I}_i + \bar{U}_i \cdot \bar{I}_i}{\bar{I}_i^2 - \bar{I}_i^2}$$

$$\hat{U}_q = \bar{U}_i + \hat{R}_i \cdot \bar{I}_i = \bar{U}_i + \frac{-\bar{U}_i \cdot \bar{I}_i + \bar{U}_i \cdot \bar{I}_i}{\bar{I}_i^2 - \bar{I}_i^2} \cdot \bar{I}_i$$

Man beachte, dass es sich hier um Schätzwerte für die tatsächlichen Parameter handelt. Die wirklichen Werte sind prinzipiell nie genau bekannt. Das Verfahren heißt **lineare Regression** und

eignet sich auch

- für mehr als zwei Parameter
- für beliebige funktionale Zusammenhänge, sofern die Parameter nur linear darin vorkommen, also z. B. für $y(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.

Ähnlich wie bei der Berechnung von Schwerpunkten in der Mechanik kann man sich hier die Bestimmung der Parameter vereinfachen, wenn man ein Schema zu Hilfe nimmt. Als Beispiel dient die zuvor abgeleitete Regression für die Parameter-Bestimmung der Spannungs-Strom-Kennlinie:

Messung Nr.	I_i [A]	U_i [V]	$U_i \cdot I_i$	I_i^2	e_i [V] zur Simulation verwendeter Fehler, der aber in Wirklichkeit unbekannt ist!
1	0,0	9,9	0,0	0,0	-0,1
2	1,0	9,2	9,2	1,0	0,2
3	2,0	7,8	15,6	4,0	-0,2
4	3,0	7,1	21,3	9,0	0,1
Mittelwert	1,5	8,5	11,52 5	3,5	0

$$\hat{R}_i = \frac{-\overline{U_i \cdot I_i} + \overline{U_i} \cdot \overline{I_i}}{\overline{I_i^2} - \overline{I_i}^2} = \frac{-11,525 + 8,5 \cdot 1,5}{3,5 - 1,5^2} = 0,98 \Omega$$

$$\hat{U}_q = \overline{U_i} + \hat{R}_i \cdot \overline{I_i} = 8,5 + 0,98 \cdot 1,5 = 9,97 \text{ V}$$

Die hier zugrunde gelegten „wirklichen“ Werte sind $R_i = 1 \Omega$ und $U_q = 10 \text{ V}$. Wenn man z. B. nur die Messwertpaare Nr. 1 und Nr. 2 verwendet, erhält man aus dem linearen Gleichungssystem die Lösungen $\hat{R}_i = 0,7 \Omega$ und $\hat{U}_q = 9,9 \text{ V}$ (nachprüfen!)

Übung: Bestimmen Sie die Parameter mit den Messwertpaaren

- Nr. 1 und Nr. 3 (Lösung: $\hat{R}_i = 1,05 \Omega$ $\hat{U}_q = 9,9 \text{ V}$)
- Nr. 1 und Nr. 4 (Lösung: $\hat{R}_i = 0,93 \Omega$ $\hat{U}_q = 9,9 \text{ V}$)
- Nr. 2 und Nr. 3 (Lösung: $\hat{R}_i = 1,4 \Omega$ $\hat{U}_q = 10,6 \text{ V}$)
- Nr. 2 und Nr. 4 ?
- Nr. 3 und Nr. 4 ?

Die Ergebnisse sind alle unterschiedlich und es gibt kein Kriterium dafür, welches dasjenige mit dem kleinsten Fehler sein könnte. Daher ist das über die lineare Regression ermittelte das „Beste“ im Sinne des kleinsten mittleren quadratischen Fehlers, allerdings nur dann, wenn angenommen werden kann, dass der arithmetische Mittelwert der Messfehler mit wachsender Zahl der Messungen gegen Null geht. Oft ist diese Voraussetzung gegeben, bedarf aber zunächst der Überprüfung. Dies stellt eine der Aufgaben der Messtechnik dar, auf die hier nicht eingegangen wird.

13 Numerische Fehler bei der Lösung von Gleichungssystem

Außer den im vorigen Kapitel angesprochenen Messfehlereinflüssen auf ein berechnetes Zahlenergebnis gibt es auch Fehler, die wegen der **endliche Stellenzahl** in Digitalrechnern auftreten. Zwei Hauptgründe:

- Da Digitalrechner im Binärsystem rechnen, lassen sich Zahlen, die im Dezimalsystem endlich viele Stellen aufweisen, im Binärsystem oft nicht mit endlich vielen Stellen angeben. Dann bringt auch die zu Lasten der Rechenzeit immer mögliche beliebige Erweiterung der Stellenzahl keine exakte Lösung (**Hinweis:** Man denke daran, dass man praktisch mit jedem Mikrocontroller beliebig lange Binärzählen durch Zuordnung einer entsprechenden Anzahl von Bytes realisieren kann und sich hierfür in Assembler-Sprache alle Rechenoperationen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division programmieren lassen).
Z. B. ist die Dezimalzahl 0.4 als Binärzahl nicht durch eine endliche Summe von Zweier-Potenzen darstellbar und muss gerundet werden:

$$0.4 = 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-6} + 2^{-7} + \dots = 0.25 + 0.125 + 0.015625 + 0.0078125 + \dots$$

Das theoretische Ergebnis nähert sich in Binärdarstellung dem Wert 0.4 zwar beliebig an, erreicht ihn aber nicht exakt. Bei endlicher Stellenzahl muss man sich daher immer mit einer Näherung begnügen. Als Versuch kann man mit MATLAB einmal die einfache Rechnung $1.0 - 0.4 - 0.4 - 0.4$ durchführen lassen. Als Ergebnis erwartet man selbstverständlich den Wert 0, aber ... ?

Diese Eigenheit ist elementar und lässt sich prinzipiell auch durch Erhöhung der Stellenzahl nicht beseitigen, man kann auf Kosten der Rechenzeit nur die Auswirkung auf die Genauigkeit vermindern.

- Viele Zahlen, wie z. B. $\sqrt{2}$ als irrationale Zahl oder π als transzendente Zahl, sowie die Ergebnisse elementarer Funktionen wie $\sin(x)$, e^x , $\ln x$ usw., sind sogar in keinem Zahlensystem mit endlich vielen Stellen darstellbar. Sie müssen also immer **gerundet** werden, so dass auch alle Ergebnisse, in die sie eingehen, gerundet und damit ungenau sind.

Die Lage entwickelt sich umso ungünstiger, je öfter Rechenoperationen mit Rundungen hintereinander ablaufen. Bei der Lösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten kann das zu völlig unbrauchbaren Ergebnissen führen. Leider ist dies nicht ohne weiteres erkennbar. Man benötigt also Kriterien, welche eine Beurteilung der Zuverlässigkeit gestatten.

Eine Möglichkeit besteht in der Analyse der **Eigenwerte** eines Gleichungssystems. Man erhält sie u. a. aus der Systemmatrix über deren Determinante. Ein System mit n Gleichungen hat n solcher Eigenwerte. Mit ihrer Hilfe lässt sich folgende Aussage treffen:

Je mehr sich die Eigenwerte im Betrag unterscheiden, umso unzuverlässiger wird die Lösung des Gleichungssystems sein, wenn mit endlicher Stellenzahl gerechnet wird, was bei realen Rechnern immer der Fall ist.

Bevor auf die mathematische Erläuterung der Eigenwerte eingegangen wird, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

13.1 Beispiel: Berechnung der Eigenwerte eines Systems 2. Ordnung

Am Beispiel eines Systems von zwei linearen Gleichungen lässt sich die Bestimmung der zugehörigen zwei Eigenwerte verdeutlichen, siehe auch Kapitel ???. Das Gleichungssystem mit den beiden Unbekannten x_1 und x_2 hat den Aufbau

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c$$

$$d \cdot x_1 + e \cdot x_2 = f$$

Als Spaltenvektordarstellung kann man es auch in folgender Matrixform schreiben:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \quad \text{oder abgekürzt} \quad A \cdot x = y .$$

Die Eigenschaften des Systems, welche die Genauigkeit einer numerischen Lösung beim Rechnen mit endlicher Stellenzahl beeinflussen, „stecken“ ausschließlich in den Eigenwerten λ der Systemmatrix A . Man erhält diese, wenn man von A zunächst die Eigenwertmatrix $\lambda \cdot I$ abzieht, wobei I die Einheitsmatrix darstellt:

$$A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-\lambda) & b \\ d & (e-\lambda) \end{bmatrix} .$$

Hiervon bildet man die Determinante und setzt sie auf 0:

$$\text{Det}(A - \lambda \cdot I) = \text{Det} \left(\begin{bmatrix} (a-\lambda) & b \\ d & (e-\lambda) \end{bmatrix} \right) = (a-\lambda) \cdot (e-\lambda) - b \cdot d = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in λ , auch **charakteristisches Polynom** der Matrix A genannt,

$$\lambda^2 - (a+e) \cdot \lambda + a \cdot e - b \cdot d = 0 .$$

Sie hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+e}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+e}{2}\right)^2 - a \cdot e + b \cdot d} .$$

Das **Betragsverhältnis**

$$\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}$$

gestattet Rückschlüsse auf die zu erwartende Genauigkeit der numerischen Lösung des Gleichungssystems. Um sich einen Eindruck zur Eignung dieses Kriteriums verschaffen zu können, wird für eine **Übungsaufgabe** angenommen, dass die Unbekannten die Werte

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 1 \quad \text{haben.}$$

Die Parameter sollen sein

$$a = 1$$

$$b = 1 \cdot 10^{-10} = 0.000\,000\,000\,1$$

$$d = 1$$

$$e = 2 \cdot 10^{-9} = 0.000\,000\,002$$

Mit den beiden Unbekannten ergeben sich die rechten Seiten daraus als

$$c = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 10^{-10} \cdot 1 = 1.000\,000\,000\,1$$

$$f = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 10^{-9} \cdot 1 = 1.000\,000\,002$$

Fragen und Aufgaben:

- Berechnen Sie über irgendein aus „Mathematik I“ bekanntes Verfahren die Unbekannten durch Handrechnung (es muss das exakte Ergebnis herauskommen)
- Berechnen Sie die Unbekannten gemäß a), wenn die Rechengenauigkeit auf 9 Nachkommastellen begrenzt wird (man muss die Ergebnisse also kaufmännisch runden). Kommt die exakte Lösung heraus? Wenn nein, wie groß ist die prozentuale Abweichung?

- c) Berechnen Sie die Unbekannten mit Hilfe Ihres Taschenrechners. Ergebnis?
d) Berechnen Sie die Unbekannten mit Hilfe von MATLAB. Ergebnis?

Hinweis: Geben Sie im Command-Window die Matrix A und den Vektor y ein:

$$A = [1, 10^{-10}; 1, 2 \cdot 10^{-9}]$$

$$y = [1 + 10^{-10}; 1 + 2 \cdot 10^{-9}]$$

Dabei unterschiedliche Wirkung von Komma und Semikolon beachten! Kommas trennen Elemente in einer Zeile, ein Semikolon beendet die aktuelle Zeile.

Probieren Sie nun folgende Eingaben und vergleichen Sie die Ergebnisse:

$$x = \text{inv}(A) * y$$

$$x = A \backslash y$$

- e) Berechnen Sie die beiden Eigenwerte und stellen sie das Größenverhältnis fest (ein sehr großes bzw. sehr kleines Verhältnis signalisiert numerisch bedingte Ungenauigkeiten).

$$\text{(Lösung: } \lambda_1 = 2 \text{ , } \lambda_2 = 9.5 \cdot 10^{-10} \text{)}$$

Hinweis: In MATLAB können die Eigenwerte mit $\text{eig}(A)$ bestimmt werden.

Das beschriebene Verfahren eignet sich für beliebige Anzahlen von linearen Gleichungen. Immer geht es darum,

- das charakteristische Polynom in den Eigenwerten λ_i aufzustellen,
- die Nullstellen zu bestimmen (= Eigenwerte)
- das Betragsverhältnis der größten zur kleinsten Nullstelle (des größten zum kleinsten Eigenwert) zu ermitteln.

Große Betragsverhältnisse der Eigenwerte lassen wegen der begrenzten Stellenzahl rechnerische Ungenauigkeiten bei der Lösung des Gleichungssystems erwarten. Die Ungenauigkeiten können die Lösung völlig unbrauchbar machen. Im obigen Beispiel ist das Betragsverhältnis mit

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2.1 \cdot 10^9$$

sehr groß und damit sehr schlecht. Es lässt keine zufriedenstellende Genauigkeit erwarten. Das Gleichungssystem hat dann eine schlechte **Kondition**. Für die Verbesserung der Genauigkeit müsste man

- die Stellenzahl erhöhen (= beim Mikrocontroller die Anzahl der Bytes zur Darstellung der Operanden vergrößern),
- oder – was oft wirksamer ist – einen weniger anfälligen Algorithmus wählen. Dies gehört zu den Aufgaben der **numerischen Mathematik**. Bei Mathematikpaketen wie MATLAB werden oft bereits „unempfindliche“ Verfahren verwendet.

Bei MATLAB lässt sich über die Funktion $\text{cond}(A)$ die Kondition direkt berechnen und bietet somit ein Hilfsmittel zur Beurteilung der erzielbaren Genauigkeit.

Hinweis: Die direkte Aufstellung des charakteristischen Polynoms in der gezeigten Weise ist ihrerseits anfällig für numerische Ungenauigkeiten, was sich insbesondere in den Polynomkoeffizienten zeigt. Sind diese ungenau, wirkt sich das auch nachteilig auf die Genauigkeit der Nullstellen aus. Es gibt aber numerisch zuverlässige Wege, um die Polynomkoeffizienten für große Systeme ausreichend genau zu bestimmen, z. B. das Verfahren nach **Hessenberg**. Die Berechnung der Nullstellen selbst ist viel weniger anfällig gegen Ungenauigkeiten.

14 Eigenwerte und Eigenvektoren II

Als nächstes soll geklärt werden, was die Eigenvektoren einer quadratischen Matrix sind. Zwar werden sie in der Ingenieurtechnik weniger häufig als die Eigenwerte gebraucht, stehen damit aber in unmittelbarem Zusammenhang, weshalb es sich lohnt, zu wissen, was es damit auf sich hat. An einem Beispiel lässt sich ihre Eigenschaft zeigen. Das bereits verwendete Gleichungssystem aus Kapitel ??? enthält den unbekanntem Vektor x .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \cdot x = y .$$

Man sucht nun Lösungen für x , welche als rechte Seite wieder den Vektor x , aber skalar multipliziert mit „seinem“ Eigenwert λ ergeben:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \cdot x = \lambda \cdot x .$$

Allgemein bewirkt die Multiplikation eines Vektors x mit einer regulären (= invertierbaren) Matrix A eine Drehstreckung von x so, dass diese den Vektor y ergibt. Ist aber x ein Eigenvektor, so erfolgt durch die Transformation mit A **keine** Drehung von x , sondern nur eine Streckung um den Betrag des zugehörigen Eigenwertes λ . Erinnerung: Eine orthogonale Matrix bewirkt nur eine Drehung, keine Streckung.

Wie lassen sich nun die Eigenvektoren berechnen? Bringt man die rechte Seite nach links, so führt das auf eine zur Bestimmung der Eigenwerte verwandte Darstellung:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-\lambda) & b \\ d & (e-\lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A' \cdot x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Da die rechte Seite Null ist, liegt ein homogenes Gleichungssystem vor. Man kann es nur lösen, wenn die Matrix A' **singulär** ist, d. h. die Determinante Null besitzt. Das wird aber gerade durch die in A' „eingebauten“ Eigenwerte sicher gestellt, siehe Kapitel 13.4.1. In singulären ($n \times n$) Matrizen gibt es dann wenigstens zwei linear abhängige Zeilen.

Ein Beispiel: Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{hat die beiden Eigenwerte} \quad \lambda_1=3 \quad \text{und} \quad \lambda_2=4 .$$

Für $\lambda_1=3$ erhält das homogene Gleichungssystem die Form

$$A' \cdot x_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Bei der Lösung - z. B. mit dem Gaußschen Algorithmus - tritt die Besonderheit auf, dass die beiden Zeilen von A' linear abhängig sind (dies ist die **Bedingung** für die Lösbarkeit eines homogenen Gleichungssystems überhaupt!). Zieht man die obere von der unteren Zeile ab, ändert sich die rechte Seite wegen der Nullelemente nicht und es ergibt sich

$$A' \cdot x_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Eine der beiden Komponenten von x kann **willkürlich** festgelegt werden, z. B. $x_1 = 1$. Dann ergibt sich wegen der ersten Gleichung $-x_1 + x_2 = 0$ die zweite Komponente als $x_2 = 1$. Die Lösung

$$x_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

erfüllt auch die zweite Gleichung $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$ und damit das homogene Gleichungssystem insgesamt. x_{λ_1} ist der gesuchte **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda_1=3$. Allerdings erfüllt auch jeder mit einem Skalar k multiplizierte Eigenvektor $k \cdot x_{\lambda_1}$ das Gleichungssystem, so dass es unendlich viele Lösungen gibt. **Alle** homogenen Gleichungssysteme weisen diese Besonderheit auf.

Für $\lambda_1=4$ hat das homogene Gleichungssystem die Form

$$A' \cdot x_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Für die Lösung wird wegen der linearen Abhängigkeit zunächst wieder die zweite Zeile eine Nullzeile:

$$A' \cdot x_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Setzt man willkürlich $x_1 = 1$, so ergibt sich wegen $-2 \cdot x_1 + x_2 = 0$ die zweite Komponente als $x_2=2$. Die Lösung

$$x_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

erfüllt auch hier die zweite Gleichung $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$ und damit das homogene Gleichungssystem insgesamt. x_{λ_2} ist der gesuchte Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2=4$.

Wiederum erfüllt jeder mit einem Skalar m multiplizierte Eigenvektor $m \cdot x_{\lambda_2}$ das Gleichungssystem ebenfalls.

Hinweis: Die beschriebenen Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren lassen sich in gleicher Weise für beliebige lineare ($n \times n$)-Gleichungssysteme durchführen. Eine Handrechnung ist jedoch meistens mühsam und auch gar nicht erforderlich, da Mathematikpakete wie MATLAB oder Scilab hierfür optimierte Funktionen bieten, die man häufig insbesondere bei der Bearbeitung technischer Aufgabenstellungen zur Bestimmung der Eigenwerte braucht.

Übung: Das obige Beispiel soll mit MATLAB bearbeitet werden. Man gibt im Command-Window

$$A = [2, 1; -2, 5]$$

ein, dabei Wirkung von Komma und Semikolon beachten! Die Berechnung der Eigenwerte erfolgt mit

$$\text{eig}(A)$$

Eine Bestimmung des charakteristischen Polynoms als Zwischenergebnis ist hier nicht erforderlich.

14.1 Technische Bedeutung von Eigenwerten

Die Kenntnis der Eigenwerte eines technischen Systems hat große Bedeutung für die damit in Zusammenhang stehenden Aufgabenstellungen. Ein Beispiel: Ein Feder-Masse-System befindet sich zunächst im Ruhezustand. Die Vertikallage x der Masse hat den Wert $x = 0$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Masse m um den Betrag $x = -x_0$ nach unten ausgelenkt und sich dann selbst überlassen. Die Feder mit der Federkonstanten c_f zieht die Masse zunächst nach oben. Wenn die in der Feder gespeicherte potenzielle Energie verbraucht und vollständig in kinetische Bewegungsenergie der Masse umgewandelt ist, hat die Masse ihre höchste Position erreicht. Sie beginnt nach unten zu fallen und „lädt“ dabei die Feder wieder mit potenzieller Energie auf. Zugleich wird wegen des Luftwiderstandes und der Verformungsarbeit etwas Energie in Wärme

umgewandelt und dem System für die weitere Bewegung entzogen. Die Bewegungen werden schwächer, irgendwann tritt Stillstand ein.

Der ganze Ablauf ist eine gedämpfte Schwingung. Sie lässt sich durch die Differenzialgleichungen für die Bewegung beschreiben. Mit

$$\begin{aligned} x &= x(t) && \text{für die Lage} \\ \dot{x} &= \dot{x}(t) && \text{für die Geschwindigkeit} \\ \ddot{x} &= \ddot{x}(t) && \text{für die Beschleunigung} \end{aligned}$$

stehen die an der Masse angreifenden Kräfte über die **Differenzialgleichung**

$$-m \cdot \ddot{x} - k_R \cdot \dot{x} - c_f \cdot x = 0$$

im Gleichgewicht. Dabei bedeutet m die Masse, k_R ist die Reibungskonstante für eine bremsende, geschwindigkeitsabhängige Kraft und c_f die Federkonstante. Mit den Zustandsvariablen (sie beschreiben den potenziellen und kinetischen Energiezustand des Systems)

$$\begin{aligned} x_1 &= x = x(t) \\ x_2 &= \dot{x} = \dot{x}(t) \end{aligned}$$

kann diese Differenzialgleichung in Matrixform dargestellt werden:

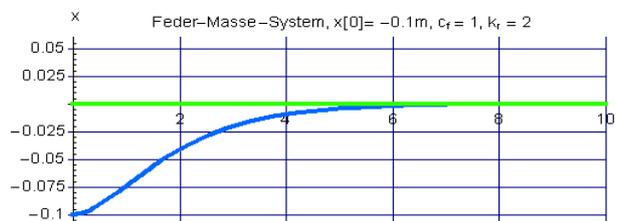
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c_f}{m} & -\frac{k_R}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \dot{x} = A \cdot x$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix A bestimmen dabei die Periodendauer T der Schwingung und das Maß der Dämpfung. Bei Differenzialgleichungen höherer Ordnung geben die Eigenwerte entsprechend mehrere Eigenschwingungsformen und Dämpfungen an. Für die Analyse eines technischen Systems sind sie deshalb von großer Bedeutung.

Ist im Beispiel $c_f = 1 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$, $m = 1 [\text{kg}]$ und $k_R = 2 \left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \right]$, dann wird

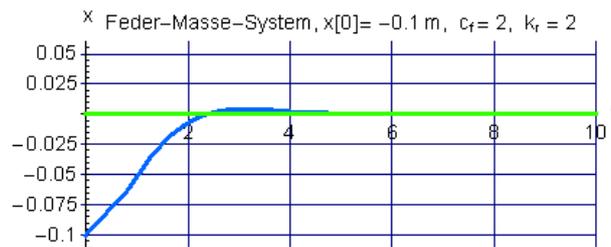
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{mit den Eigenwerten} \quad \lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -1$$

Bei dieser Dimensionierung führt das Feder-Masse-System überhaupt keine Schwingung aus, sondern „kriecht“ in die Ruhelage:



Macht man die Federkonstante um das Doppelte „steifer“ z.B. durch einen höheren E-Modul des Federmaterials, dann wird

$$c_f = 2 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \quad \text{und} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda_1 = -1 + j, \quad \lambda_2 = -1 - j$$

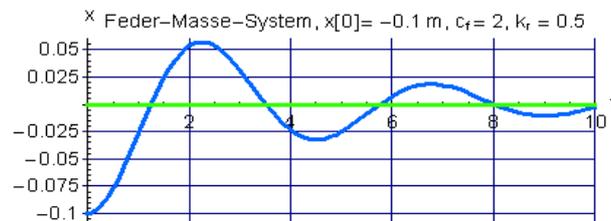


Die Eigenwerte sind hier konjugiert komplexe Zahlen (siehe Kapitel ???) und verweisen nun auf eine stark gedämpfte Schwingungen mit sehr geringem „Überschwinger“ des Feder-Masse-Systems:

Halbiert man zusätzlich die Reibungskonstante, z. B., in dem man der Masse durch Spoiler in Bewegungsrichtung eine „windschnittigere“ Form verleiht, dann wird

$$k_R = 0.5 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right], \quad c_f = 2 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \quad \text{und} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.5 \end{bmatrix} \quad \text{mit den Eigenwerten}$$

$$\lambda_1 = -0.25 + 1.4 \cdot j, \quad \lambda_2 = -0.25 - 1.4 \cdot j$$



Auch hier sind sie konjugiert komplexe Zahlen und bewirken eine schlecht gedämpfte Schwingung:

Schlussfolgerung: Lässt sich also das Verhalten eines technischen Systems durch Gleichungen beschreiben (Kräftegleichgewicht, Kirchhoffsche Gesetze, chemische Reaktionsbilanzen usw.), so kann man die Parameter wie Massen, Federkonstanten, Widerstände und andere in einer **Simulation** zunächst rechnerisch so verändern, dass das System bereits das gewünschte Verhalten zeigt. Z. B. probiert der Konstrukteur eines aktiven Dämpfungssystems für ein Fahrzeug schon „im Büro“ verschiedene Einstellungen der Parameter aus, ehe er mit dem realen Fahrzeug auf die Teststrecke geht. Dies erspart Zeit und Kosten und mindert Sicherheitsrisiken.

Aber **Vorsicht:** Die Eignung eines technischen Systems erweist sich immer erst mit dem Verhalten des realen Objektes. Technische Beschreibungen mit Hilfe von Gleichungssysteme können ungenau und fehlerhaft sein, so dass daraus falsche Schlüsse gezogen würden. Simulationsergebnisse müssen daher

- sorgfältig auf technische Plausibilität geprüft
- mit bereits vorhandenen Ergebnissen realer, ähnlicher Anordnungen verglichen,
- und durch Anpassen und Verändern der beschreibenden Gleichungen verbessert werden.

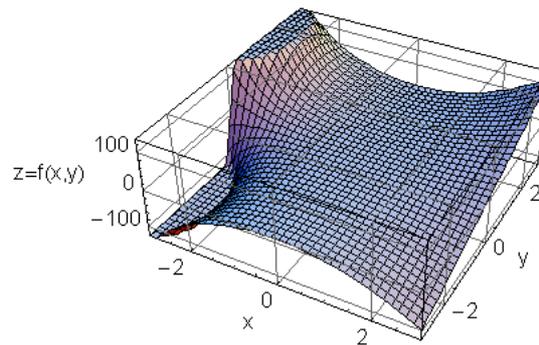
15 Totales Differenzial und partielle Ableitungen

Wenn eine Gleichung oder Funktion von mehr als einer Variablen abhängt, z. B.

$$z = f(x, y) = x^2 \cdot (4 \cdot y + 1) - \sin(y) \cdot e^{-2x},$$

können u. A. die Antworten auf folgende Fragen interessieren:

- Wie groß ist die Steigung der Funktion z abhängig von x bei **konstantem** y?
- Wie groß ist die Steigung der Funktion z abhängig von y bei **konstantem** x?



- Wie groß ist die Steigung der Funktion z abhängig von x **und** y ? Als Diagramm kann man diese Funktion nur dreidimensional darstellen. Die beiden unabhängigen Variablen x und y spannen eine Ebene auf, der Funktionswert z erscheint als „Gebirge“ darüber:

Ein Beispiel ist die Temperaturdarstellung der Wetterkarte Europas. Legt man den Nullpunkt eines dreidimensionalen Koordinatensystems nach Paris, die Achsenorientierung für x in Ost-Westrichtung, für y in Nord-Südrichtung und z von unten nach oben, so kann jedem Punkt am Boden eine Temperatur zugeordnet werden, die sich als Raumfläche über der x - z -Ebene darstellen lässt. Hält man y auf einem konstanten Wert fest, z. B. $y = 0$, dann ergibt sich in der Nord-Süd-Richtung von Paris eine gewöhnliche zweidimensionale Funktion in der Schnittebene $y = 0$.

Bei der oben angegebenen Funktion wäre es

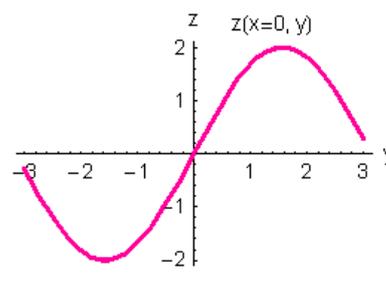
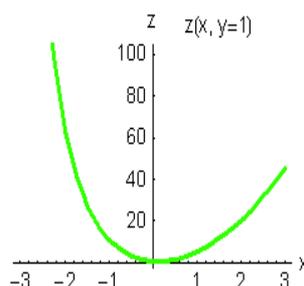
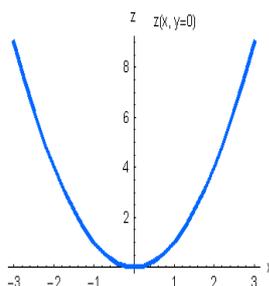
$$z = f(x, y=0) = x^2,$$

in der Schnittebene $y = 1$

$$z = f(x, y=1) = x^2 \cdot 5 - \sin(1) \cdot e^{-2x}.$$

und in der Schnittebene $x = 0$

$$z = f(x=0, y) = -\sin(y).$$



Die Antwort auf die ersten beiden Fragen wird mit Hilfe der **partiellen** Ableitung gegeben: Man differenziert z nach einer der Variablen und behandelt die übrigen als Konstanten. Um diese Art der Ableitung von der normalen zu unterscheiden, wählt man spezielle Differentialoperatoren, ansonsten ändert sich nichts:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot (4 \cdot y + 1) - (-2) \cdot \sin(y) \cdot e^{-2x} \quad (y \text{ wird als Konstante behandelt})$$

Für $y = 0$ ist die partielle Ableitung einfach die Tangente an der Funktion $z = f(x, y=0) = x^2$ usw.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot 4 - \cos(y) \cdot e^{-2x} \quad (x \text{ wird als Konstante behandelt})$$

Will man den Einfluss beider Variablen auf z ausdrücken, verwendet man das **totale Differenzial dz**:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy ,$$

wobei die partiellen Ableitungen an der Stelle eines Arbeitspunktes z_0 für $x = x_0$ und $y = y_0$ genommen werden:

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$dz = [2 \cdot x_0 \cdot (4 \cdot y_0 + 1) - (-2) \cdot \sin(y_0) \cdot e^{-2x_0}] \cdot dx + [x_0^2 \cdot 4 - \cos(y_0) \cdot e^{-2x_0}] \cdot dy$$

Diese Form ist eigentlich eine Taylorreihen-Entwicklung für z um z_0 und wird bei der Linearisierung nichtlinearer Funktionen häufig gebraucht. Das totale Differenzial stellt die Steigung der berührenden Ebene in jedem Punkt der dreidimensionalen Funktion

$$z = f(x, y) = x^2 \cdot (4 \cdot y + 1) - \sin(y) \cdot e^{-2x} \text{ dar.}$$

Für die im nächsten Kapitel behandelten Linearisierungen werden die nichtlinearen Funktionsverläufe von z einfach durch die berührenden Geraden oder Ebenen in festgelegten Arbeitspunkten ersetzt.

16 Linearisierung um Arbeitspunkte nichtlinearer Gleichungen

In der Ingenieurtechnik bevorzugt man lineare Beschreibungen und lineare Gleichungen der Systeme in den Variablen (Kräfte, Spannungen usw.), da die Auswertung dann in verschiedener Hinsicht verhältnismäßig einfach bleibt. Leider gibt es aber viele technische Anordnungen, die sich nichtlinear verhalten. Man kann dann versuchen, unter einschränkenden Voraussetzungen trotzdem lineare Zusammenhänge herzustellen. Hierbei lassen sich zwei Fälle unterscheiden.

Fall a: Die Gleichung oder Kennlinie wird nur durch eine einzige Variable beschrieben.

Die Strom-Spannungs-Kennlinie einer Halbleiter-Diode z. B. verläuft nach einer e-Funktion:

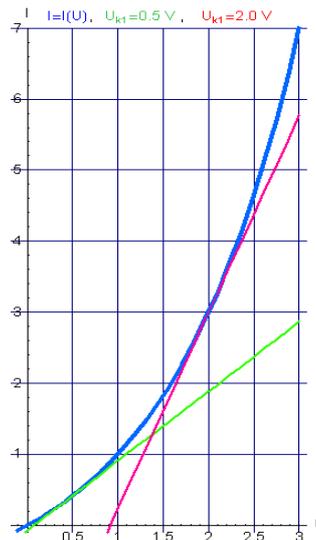
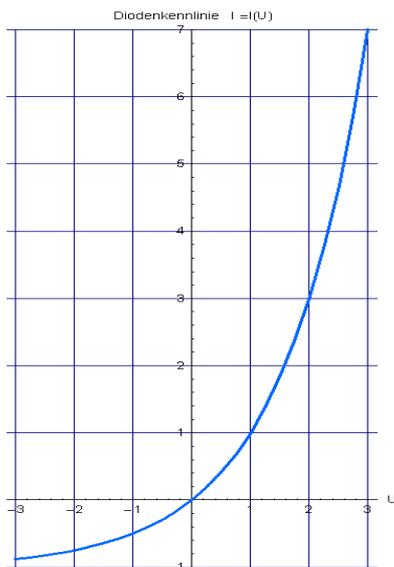
$$I = I_0 \cdot (e^{\ln 2 \cdot \frac{U}{U_0}} - 1) .$$

Bei $U=0$ fließt kein Strom, bei $U = U_0$ hat der Strom den Wert I_0 . Der Widerstand ist allerdings nicht konstant, sondern hängt von der an der Diode liegenden Spannung ab: Je höher die Spannung, desto kleiner der Widerstand, bzw. desto größer der Leitwert

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{I_0 \cdot (e^{\ln 2 \cdot \frac{U}{U_0}} - 1)}{U} .$$

Mit der nichtlinearen Strom-Spannungskennlinie (linkes Diagramm) lässt sich z. B. ein spannungsgesteuerter Widerstand, ein sogenanntes **Potentiometer**, realisieren, wenn man nur kleine Auslenkungen der Spannung U um einen Arbeitspunkt U_k herum gestattet. Dann legt man im Punkt (I_k, U_k) eine Tangente an die Kennlinie (rechtes Diagramm) und betrachtet deren Steigung als **differenziellen Leitwert** G_k . Die Steigung der Tangente erhält man, wenn man die Kennliniengleichung nach U ableitet und in den entstandenen Ausdruck den Wert $U = U_k$ für den Arbeitspunkt einsetzt.

$$G_k = \frac{dI}{dU} = \frac{d\left(I_0 \cdot (e^{\ln 2 \cdot \frac{U}{U_0}} - 1)\right)}{dU}$$



Der differentielle Leitwert G_k im Punkt $U = U_k$ ist dann (Kettenregel!)

$$G_k = \left[\frac{dI}{dU} \right]_{U_k} = \left[\frac{d \left(I_0 \cdot \left(e^{\ln 2 \cdot \frac{U}{U_0}} - 1 \right) \right)}{dU} \right]_{U_k} = I_0 \cdot \frac{\ln 2}{U_0} \cdot e^{\ln 2 \cdot \frac{U_k}{U_0}} .$$

Im rechten Diagramm oben ist grün die Gerade für den Arbeitspunkt ($U_{k1} = 0.5$ V, $I_{k1} = 0.41$ A) und rot die Gerade für ($U_{k2} = 2$ V, $I_{k2} = 3$ A) eingetragen. (**Frage:** Wie kommen die Werte für diese Arbeitspunkte zustande?). Zu beachten ist der Unterschied zwischen den absoluten Leitwerten in den Arbeitspunkten und den dort vorliegenden differentiellen Leitwerten.

Die absoluten Leitwerte sind

$$G \left(\frac{I_{k1}}{U_{k1}} \right) = 0.83 [\text{Siemens}] \quad \text{und} \quad G \left(\frac{I_{k2}}{U_{k2}} \right) = 1.5 [\text{Siemens}] ,$$

die differentiellen Leitwerte

$$G_{k1} = 0.98 [\text{Siemens}] \quad \text{und} \quad G_{k2} = 2.78 [\text{Siemens}] .$$

Für größere Arbeitspunkt-Spannungen wächst hier also der differentielle gegenüber dem absoluten Leitwert an. Kleine Spannungsveränderungen an der Diode bewirken je nach Arbeitspunkt in einem kleinen Gebiet um diesen Arbeitspunkt herum unterschiedliche Stromveränderungen. Durch Einstellen eines bestimmten Arbeitspunktes (U_k, I_k) lässt sich so für kleine „Spannungsauslässe“ der Strom verändern – was an einem normalen ohmschen Widerstand nicht möglich ist. Dieses Verhalten kann z. B. zur spannungsgesteuerten Lautstärkeregelung bei einem Verstärker genutzt werden. Man benötigt dann keinen mechanischen Dreh- oder Schiebewiderstand.

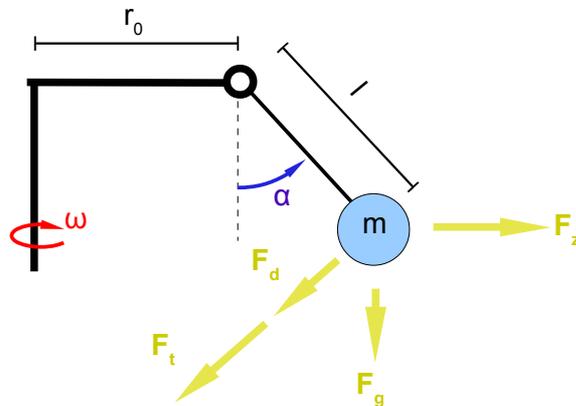
Übung: Für $U_0 = 1$ V, $I_0 = 1.0$ A berechne man

- den Widerstand und Leitwert der Diode bei $U = U_0$
- den differentiellen Widerstand und Leitwert bei $U = U_0$
- den Widerstand und Leitwert der Diode bei $U = 3 U_0$
- den differentiellen Widerstand und Leitwert bei $U = 3 U_0$

Fall b: Die Gleichung oder Kennlinie wird durch mehr als eine Variable beschrieben.

Als Beispiel dient ein **Fliehkraftpendel**, wie es vom Erfinder der Dampfmaschine, James Watt, als

Regler für die Drehzahl eingesetzt wurde. Mit steigender Drehzahl wird die Masse des mit der Welle verbundenen Pendels durch die Zentrifugalkraft F_z nach außen gedrückt und drosselt dabei über ein Ventil die Dampfzufuhr. Dadurch stellt sich nach einer kleinen Übergangszeit eine konstante Drehzahl ω_0 ein (die man durch Verschieben der Masse auf der Pendelstange wählen kann).



Die Regelungstechnik zeigt, dass das Eigenverhalten eines solchen Reglers den Regelvorgang entscheidend beeinflusst. Es kann passieren, dass je nach Konstruktion des Reglers die Drehzahl nur sehr langsam ausgeregelt wird oder im anderen Fall anfängt, zu schwingen. Beides muss natürlich vermieden werden. Dafür ist die Kenntnis des Eigenverhaltens erforderlich. Man erhält es z. B., in dem man die Gleichgewichtsbedingungen der am Pendel um seinen Drehpunkt angreifenden Momente bildet. Diese entstehen durch folgende, am Hebelarm I zwischen Drehpunkt und Massenschwerpunkt wirkenden Kräfte:

- Zentrifugalkraft $F_z = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot [r_0 + l \cdot \sin(\alpha)] \cdot \omega^2$
- Schwerkraft $F_g = m \cdot g$
- Dämpfungskraft $F_d = k_R \cdot \dot{\alpha}$
- Trägheitskraft $F_t = m \cdot l \cdot \ddot{\alpha}$

Hinweis: Man beachte den Unterschied zwischen der Drehung der Achse des Pendels, welche durch die Drehung der Dampfmaschinenwelle mit der Winkelgeschwindigkeit ω bewirkt wird und die Drehung des Pendels um seinen Befestigungspunkt, ausgedrückt durch den Winkel α .

Es ist

- α der Winkel zwischen Drehachse und Masse m ,
- $\dot{\alpha}$ die Winkelgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit, mit der sich der Winkel verändert,
- $\ddot{\alpha}$ die Winkelbeschleunigung, d. H., die Geschwindigkeit, mit der sich die Winkelgeschwindigkeit verändert,
- r_0 der Abstand der Massenschwerpunktes von der Drehachse, wenn sich das Pendel nicht gedreht wird,
- k_R der Dämpfungsfaktor,
- ω Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Fliehkraftpendels (durch die Welle der Dampfmaschine).

Die Momentensumme ergibt folgende Differenzialgleichung (siehe auch Kapitel ???) für den Winkel α :

$$M_{\text{gesamt}} = -F_t \cdot l - F_d \cdot l - F_g \cdot l \cdot \sin \alpha + F_z \cdot l \cdot \cos \alpha = 0$$

oder nach Division durch l:

$$F_{\text{gesamt}} = -F_t - F_d - F_g \cdot \sin \alpha + F_z \cdot \cos \alpha = 0 \quad \text{oder}$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{k_R}{m \cdot l} \cdot \dot{\alpha} + \frac{g}{l} \cdot \sin \alpha - \left(\frac{r_0}{l} + \sin \alpha \right) \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha = 0 \quad .$$

Da der Winkel α nur als Argument in der Sinus- und Cosinus-Funktion auftritt, ist diese Gleichung nichtlinear. Die stationären Betriebspunkte (α_0, ω_0) erhält man, wenn die zeitabhängigen Variablen $\dot{\alpha}=0$ und $\ddot{\alpha}=0$ gesetzt werden (keine Pendelbewegung)

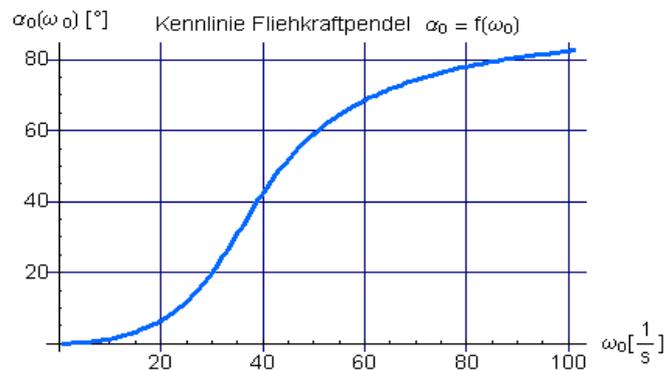
$$\frac{g}{l} \cdot \sin \alpha_0 - \left(\frac{r_0}{l} + \sin \alpha_0 \right) \cdot \cos \alpha_0 \cdot \omega_0^2 = 0$$

und man die verbleibende nichtlineare Gleichung z. B. über

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \cdot \text{tg} \alpha_0 \cdot \frac{1}{\frac{r_0}{l} + \sin \alpha_0}$$

löst (MATLAB oder Scilab).

Für $l=0.5 \text{ m}$, $r_0=0.25 \text{ m}$, $g = 9.81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ ergibt sich folgende Kennlinie zwischen dem stationären Winkel α_0 und der Winkelgeschwindigkeit ω_0 der Drehachse:



Um jeden stationären Betriebspunkt $A_0 = (\alpha_0, \omega_0)$ der Kennlinie lässt sich die nichtlineare Differenzialgleichung nun durch Bildung des totalen Differenzials um kleine Veränderungen

$$\Delta \ddot{\alpha} \quad , \quad \Delta \dot{\alpha} \quad , \quad \Delta \alpha \quad \text{und} \quad \Delta \omega$$

herum linearisieren:

$$\begin{aligned} dF_{\text{gesamt}} &= dF(\Delta \ddot{\alpha}, \Delta \dot{\alpha}, \Delta \alpha, \Delta \omega) \\ &= \frac{\partial F}{\partial \ddot{\alpha}} \Big|_{A_0} \cdot \Delta \ddot{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\alpha}} \Big|_{A_0} \cdot \Delta \dot{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{A_0} \cdot \Delta \alpha + \frac{\partial F}{\partial \omega} \Big|_{A_0} \cdot \Delta \omega = 0 \quad . \end{aligned}$$

Man erhält eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung (weil der Winkel mit der zweiten Ableitung nach der Zeit enthalten ist):

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\alpha} + \frac{k_R}{m \cdot l} \cdot \Delta \dot{\alpha} + \left(\frac{g}{l} \cdot \cos \alpha_0 + \frac{r_0}{l} \cdot \omega_0^2 \cdot \sin \alpha_0 - \omega_0^2 \cdot \cos 2\alpha_0 \right) \cdot \Delta \alpha \\ = 2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha_0 \cdot \left(\frac{r_0}{l} + \sin \alpha_0 \right) \cdot \Delta \omega \end{aligned}$$

Obwohl sie kompliziert aussieht, sind die meisten darin vorkommenden Teilausdrücke konstante Größen:

$$\Delta \ddot{\alpha} + a \cdot \Delta \dot{\alpha} + b \cdot \Delta \alpha = c \cdot \Delta \omega$$

Differenzialgleichungen dieses Typs lassen sich leicht lösen. Außerdem gibt es für lineare Differenzialgleichungen des Regelkreises „Dampfmaschine und Regler“ genaue Vorschriften zur Auslegung des Reglers (hier für seinen konstruktiven Aufbau), damit der Regelkreis insgesamt optimal arbeitet und weder zu langsam ausregelt noch das System zu Schwingungen der Drehzahl bringt. Für nichtlineare Beschreibungen ist dies nur eingeschränkt und oft überhaupt nicht in einfacher Weise möglich. Hierin liegt der große **Vorteil** der Linearisierung.

17 Lineare Differenzialgleichungen

Für das Lösen von linearen und nichtlinearen Gleichungen besteht die **notwendige** Bedingung darin, dass es für n Unbekannte wenigstens n unabhängige Gleichungen geben muss. Hinreichend ist dies allerdings nicht. Insbesondere kann ein Gleichungssystem generell unlösbar sein, unter anderem bei nichtlinearen Gleichungen (**aber Vorsicht**, man muss unterscheiden zwischen einer generellen Unlösbarkeit und der Unlösbarkeit in geschlossener Form als Formel; in letzterem Fall findet man trotzdem immer eine numerische Lösung, siehe etwa bei Polynomgleichungen). Andererseits lassen sich Lösungen auch dann finden, wenn es mehr Gleichungen als Unbekannte gibt, siehe etwa Kapitel ??? zur Fehlerausgleichsrechnung (= lineare Regression). In allen diesen Fällen besteht die Aufgabe darin, als Lösungen für die Unbekannten diejenigen Zahlenwerte zu ermitteln, welche die Gleichungen erfüllen.

Eine weitere Variante liegt vor, wenn statt eines Wertes für die unbekannte Größe x in den Gleichungen

$$4 \cdot x = 1 \quad \text{oder} \quad \sin(4 \cdot x) = 0.7 \quad \text{oder} \quad x^2 + 2 \cdot x - 3 = 0$$

eine Funktion y(x) gesucht wird, die mit ihren Ableitungen y'(x), y''(x) über Gleichung der Form

$$4 \cdot y'' + 3 \cdot y' + y = 2$$

verknüpft ist. Solche Gleichungen heißen daher **Differenzialgleichungen**, abgekürzt **DGL**. Es geht hier bei der Lösung also **nicht** um die Ermittlung eines passenden Zahlenwertes. In der Ingenieurtechnik treten solche DGLs sehr häufig auf, weshalb man die prinzipiellen Lösungsmethoden benötigt. Sie sind sehr umfangreich und bilden ein eigenes Gebiet der Mathematik. Man unterscheidet

- **Gewöhnliche Differenzialgleichungen** für Funktionen y(x) einer einzigen unabhängigen Variablen x: Sie enthalten nur die zu ermittelnde Funktion y(x) selbst und ihre gewöhnlichen Ableitungen y'(x), y''(x) usw. Sie gliedern sich in:
 - Gewöhnliche lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten. Diese enthalten die Funktion y(x) und ihre Ableitungen nur linear, wie in $4 \cdot y'' + 3 \cdot y' + y = 2$, also nicht als Quadrate oder andere nichtlineare Ausdrücke. Außerdem sind die Koeffizienten konstante Zahlenwerte und nicht von x abhängig.
 - Gewöhnliche lineare DGLs mit nicht konstanten Koeffizienten. Auch diese enthalten die Funktion y(x) und ihre Ableitungen nur linear, die Koeffizienten können aber lineare Ausdrücke der unabhängigen Variablen x sein, wie in $4 \cdot x \cdot y'' + 3 \cdot y' + y = 2$.
 - Systeme gewöhnlicher linearer DGLs mit konstanten oder nicht konstanten

Koeffizienten. Diese DGLs bestehen aus n DGLs für n unbekannte Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $w(x)$, ...

- Gewöhnliche nichtlineare DGLs. Sie enthalten die Funktion $y(x)$ und/oder ihre Ableitungen teilweise als Potenzen oder als andere nichtlineare Ausdrücke, z. B.

$$4 \cdot y'' + 3 \cdot \sin(y') + y^2 = 2$$

- Systeme gewöhnlicher nichtlinearer DGLs
- weitere
- **Partielle Differenzialgleichungen** für Funktionen $y(x,t)$ mehrerer unabhängiger Variablen x , t usw. Sie enthalten neben der zu ermittelnden Funktion $y(x,t)$ zusätzlich deren partielle Ableitungen. Auch die partiellen DGLs bilden einige Untergliederungen, die aber hier nicht genannt werden, weil sie in der beabsichtigten Darstellung zunächst keine Rolle spielen.

Für die häufig vorkommende Gruppe der linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gibt es in vielen praktisch vorkommenden Fällen geschlossene Lösungen oder wenigstens geeignete numerische Verfahren. Einige Beispiele werden in den folgenden Kapiteln behandelt.

17.1 Lösungsansatz für gewöhnliche lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten und Anfangsbedingungen für $x = 0$

Eine Hauptaufgabe bei der Lösung von DGLs ist das Finden geeigneter Lösungsansätze. In vielen Fällen gibt es überhaupt keine, dann kann man aber immer noch rein numerische Lösungen einsetzen, vorausgesetzt, diese existieren tatsächlich. Die Mathematik gibt in der Form von Existenzbeweisen oft Auskunft hierüber (bemerkenswerter Weise trifft man tatsächlich Aufgabestellungen an, für die grundsätzlich keine Lösung existiert, was man aber nicht ohne weiteres von selbst erkennt).

Für gewöhnliche lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten und gegebenen Anfangsbedingungen

$$y(x=0) = y_0$$

$$y'(x=0) = y'_0$$

usw.

sieht es allerdings gut aus. Zur weiteren Vereinfachung betrachtet man von zum Beispiel

$$4 \cdot y'' + 3 \cdot y' + y = 2$$

zunächst den **homogenen** Teil, bei dem die rechte Seite den Wert Null hat,

$$4 \cdot y'' + 3 \cdot y' + y = 0$$

Die einzige Funktion, deren Ableitung wieder sich selbst enthält, ist die Exponentialfunktion e^{ax} . Mit ihr lässt sich der homogene Lösungsansatz

$$y_h(x) = A \cdot e^{ax}$$

aufbauen. Er enthält die beiden unbekanntenen Konstanten A und a . Hat man damit eine allgemeine homogene Lösung gefunden, ergänzt man die von Null verschiedene rechte Seite der DGL (sie kann konstant oder eine beliebige Funktion von x sein). Dies ist die **inhomogene** DGL. Hierzu gibt es **stationäre Lösungen** - auch partikuläre Lösungen genannt, die entweder konstante Werte oder selbst variabel mit x sein können:

- $y_{st} = \text{const}$ (Einsatz bei Schaltvorgängen in Gleichspannungsnetzwerken mit ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Spulen)
- $y_{st} = f(x)$ (Einsatz bei der Berechnung stationärer Spannungen und Ströme in Wechselspannungsnetzwerken).

Die Gesamtlösung bei gegebenen Anfangsbedingungen besteht dann aus der Summe der homogenen und der stationären Lösung:

$$y = y(x) = y_h + y_{st} .$$

17.2 Gewöhnliche lineare DGLs 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Von der inhomogenen linearen DGL mit konstanter rechter Seite k

$$T \cdot y' + y = k$$

wird zunächst der homogene Teil

$$T \cdot y' + y = 0$$

behandelt. Der Lösungsansatz

$$y_h(x) = A \cdot e^{ax}$$

hat die Ableitung

$$y'_h(x) = a \cdot A \cdot e^{ax} .$$

Einsetzen in obige homogene DGL ergibt

$$T \cdot a \cdot A \cdot e^{ax} + A \cdot e^{ax} = 0 .$$

Die Frage ist, wie die unbekanntenen Konstanten a und A beschaffen sein müssen, dass diese Gleichung für alle $0 \leq x < \infty$ erfüllt wird. Eine Lösung stellt z. B. $A = 0$ dar. Sie scheidet aber als trivial (= zu einfach und technisch uninteressant) aus. Die Funktion e^{ax} selbst wird nur für $x \rightarrow -\infty$ gleich Null, kommt also ebenfalls nicht in Frage. Man kann nun obige Gleichung durch beide Anteile dividieren und behält

$$T \cdot a + 1 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{T} .$$

Bei dieser Wahl der Konstanten a , auch **Eigenwert der DGL** genannt, ist die Forderung für alle $0 \leq x < \infty$ erfüllt, wie man durch Einsetzen feststellt:

$$T \cdot \left(-\frac{1}{T}\right) \cdot A \cdot e^{-\frac{x}{T}} + A \cdot e^{-\frac{x}{T}} = 0 .$$

Der Ausdruck

$$y_h(x) = A \cdot e^{-\frac{x}{T}}$$

bildet also eine allgemeine homogene Lösung der DGL. Nimmt man nun die rechte Seite mit der Konstanten k hinzu,

$$T \cdot y' + y = k$$

dann erfüllt auch die stationäre Lösung

$$y_{st} = k$$

die DGL, da die Ableitung $y'_{st} = 0$ ist.

Hinweis: Ist der Koeffizient bei y nicht 1, also

$$T \cdot y' + b \cdot y = k, \quad b \neq 1, \text{ dann wird}$$

$$y_h(x) = A \cdot e^{-\frac{b}{T}x} \text{ und } y_{st} = \frac{k}{b} \text{ und stellt den allgemeinen Fall dar).}$$

Die allgemeine Lösung ist nun

$$y(x) = y_h(x) + y_{st} = A \cdot e^{-\frac{x}{T}} + k \quad .$$

Die noch unbekannte Konstante A bestimmt man so, dass die Gesamtlösung auch die Anfangsbedingung

$$y(x=0) = y_0$$

erfüllt. Da der Exponentialanteil für $x = 0$ den Wert 1 annimmt, ist

$$A \cdot 1 + k = y_0 \quad \text{und} \quad A = y_0 - k \quad .$$

Die Gesamtlösung wird damit

$$y(x) = (y_0 - k) \cdot e^{-\frac{x}{T}} + k \quad .$$

Ein Beispiel hierzu findet man im Aufgabenskript bei der Lösung zu Aufgabe 33.

17.3 Gewöhnliche lineare DGLs 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Solche DGLs beschreiben z. B.

- die Schwingungen eines Feder-Masse-Systems (PKW), wenn es zum Zeitpunkt $t = 0$ durch eine äußere Kraft belastet wird (Fahrt durch ein Schlagloch)
- den Spannungsverlauf in einem elektrischen Netzwerk mit Widerstand, Spule und Kondensator (Schwingkreis), wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Gleichspannung aufgeschaltet wird

siehe auch Kapitel ???.

Die allgemeine Form bei einer unabhängigen Variablen t ist

$$A \cdot \ddot{y} + B \cdot \dot{y} + C \cdot y = D \quad \text{mit } A, B, C, D \text{ als Konstanten.}$$

Beispiel:

$$\ddot{y} + 4 \cdot \dot{y} + 3 \cdot y = 2$$

Lösung:

1. Aufteilen in die homogene Lösung y_h für die homogene DGL

$$\ddot{y} + 4 \cdot \dot{y} + 3 \cdot y = 0$$

und die partikuläre (stationäre) Lösung y_p für die inhomogene DGL

$$\ddot{y} + 4 \cdot \dot{y} + 3 \cdot y = 2$$

Grundgedanke dabei: Die Summe $y = y(t) = y_h + y_p$ muss die DGL erfüllen.

2. Lösungsansatz für y_h : $y_h = K \cdot e^{a \cdot t}$.

Damit ist $\dot{y}_h = K \cdot a \cdot e^{a \cdot t}$ und $\ddot{y}_h = K \cdot a^2 \cdot e^{a \cdot t}$, eingesetzt in die homogene DGL:

$$K \cdot a^2 \cdot e^{a \cdot t} + 4 \cdot K \cdot a \cdot e^{a \cdot t} + 3 \cdot K \cdot e^{a \cdot t} = K \cdot e^{a \cdot t} \cdot [a^2 + 4 \cdot a + 3] = 0$$

Diese Gleichung muss für alle $t \geq 0$ erfüllt sein. Da der Faktor $K \cdot e^{a \cdot t}$ nur für den Fall eines negativen Exponenten und $t \rightarrow \infty$ gegen Null läuft, muss der Ausdruck in der eckigen Klammer verschwinden, also

$$a^2 + 4 \cdot a + 3 = 0 \quad .$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $a_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3}$,

$$a_1 = -1, \quad a_2 = -3.$$

Jede Lösung erfüllt für sich die homogene DGL, also auch die Summe:

$$y_h = K_1 \cdot e^{-t} + K_2 \cdot e^{-3t}$$

Die beiden Konstanten sind vorerst noch unbestimmt.

3. Lösungsansatz für y_p : Da die rechte Seite der inhomogenen DGL eine Konstante ist, muss auch y_p eine Konstante sein. Mit $y_p = K_3$ werden die beiden Ableitungen \ddot{y}_p und $\dot{y}_p = 0$ und es bleibt nach Einsetzen in die DGL

$$y_p = K_3 = \frac{2}{3}, \text{ damit die linke Seite der DGL den Wert } \frac{2}{3} \text{ annimmt.}$$

4. Allgemeine oder Gesamt-Lösung:

$$y = y(t) = y_h + y_p = K_1 \cdot e^{-t} + K_2 \cdot e^{-3t} + \frac{2}{3}$$

5. Die beiden unbestimmten Konstanten müssen aus gegebenen **Anfangsbedingungen** ermittelt werden, z. B. aus

$$y(t=0)=0 \text{ und } \dot{y}(t=0)=0.$$

Diese Anfangsbedingungen ergeben sich immer aus der aktuellen Aufgabenstellung. Z. B. sind in einem entladenen Netzwerk zum Zeitpunkt $t=0$ alle Spannungen und Ströme 0. Die Gesamtlösung liefert wegen $e^{-0}=1$ und $e^{-3 \cdot 0}=1$

$$y(t=0) = K_1 + K_2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$\dot{y}(t=0) = -1 \cdot K_1 - 3 \cdot K_2 = 0.$$

Auflösung dieses LGS ergibt $K_1 = -1, \quad K_2 = \frac{1}{3}.$

Damit ist die Gesamtlösung vollständig:

$$y = y(t) = 1 \cdot e^{-t} - \frac{1}{3} \cdot e^{-3t} + \frac{2}{3}.$$

17.4 Gewöhnliche lineare DGLs n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Das Lösungsverfahren folgt immer dem gleichen, bereits im vorherigen Kapitel angewendeten Prinzip:

- Lösungsansatz für die homogene DGL aufstellen
- Bestimmung der n Eigenwerte der charakteristischen Gleichung
- Aufstellen der allgemeinen homogenen Lösung y_h als Summe der n Teillösungen mit den noch unbekannt Konstanten K_1, K_2, \dots, K_n
- Ermitteln der stationären Lösung y_{st}
- Ermitteln der allgemeinen Lösung $y(x) = y_h(x) + y_{st}$
- Bestimmung der unbekannt Konstanten K_1, K_2, \dots, K_n aus den n Anfangsbedingungen.

17.5 Gewöhnliche lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und nicht konstanter rechter Seite

Ist die rechte Seite eine Funktion von x, z. B.

$$4 \cdot y'' + 3 \cdot y' + y = \hat{y} \cdot \sin(x) \quad (I)$$

dann wirkt sich das zwar nach wie vor **nicht** auf die allgemeine homogene Lösung aus. Der Ansatz

für die partikuläre (=stationäre) Lösung geht nun aber auch mit seinen Ableitungen ein. Für obige DGL eignet sich:

$$y_{st} = y_{st}(x) = B \cdot \sin(x + \phi) \quad (II)$$

Mit

$$y'_{st} = B \cdot \cos(x + \phi)$$

$$y''_{st} = -B \cdot \sin(x + \phi)$$

erhält man

$$-4 \cdot B \cdot \sin(x + \phi) + 3 \cdot B \cdot \cos(x + \phi) + B \cdot \sin(x + \phi) = \hat{y} \cdot \sin(x) \quad \text{oder}$$

$$-3 \cdot B \cdot \sin(x + \phi) + 3 \cdot B \cdot \cos(x + \phi) = \hat{y} \cdot \sin(x)$$

$$3 \cdot B \cdot [\cos(x + \phi) - \sin(x + \phi)] = \hat{y} \cdot \sin(x) \quad (III).$$

Dieser Ausdruck muss für beliebige Werte von x erfüllt sein. Man kann daher solche Werte wählen, die besonders einfache Ergebnisse für die weitere Auswertung ergeben.

Für $x = 0$ erhält man:

$$3 \cdot B \cdot [\cos(\phi) - \sin(\phi)] = \hat{y} \cdot \sin(0) = 0 \rightarrow \cos(\phi) - \sin(\phi) = 0 \rightarrow \text{tg}(\phi) = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

Für $x = -\phi$:

$$3 \cdot B \cdot [\cos(0) - \sin(0)] = \hat{y} \cdot \sin(-\phi) \rightarrow 3 \cdot B = \hat{y} \cdot \sin(-\phi) = -\hat{y} \cdot \sin(\phi) \rightarrow B = -\frac{\hat{y}}{3 \cdot \sqrt{2}}$$

Die stationäre Lösung ist damit

$$y_{st} = y_{st}(x) = -\frac{\hat{y}}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Das negative Vorzeichen der Amplitude besagt nur, dass die Sinus-Funktion „umgeklappt“ oder um -180° phasenverschoben wird. Zusammen mit der positiven Verschiebung um $\frac{\pi}{4} \equiv 45^\circ$ ist die stationäre Lösung also um -135° gegen die anregende Funktion der rechten DGL-Seite verschoben.

Die Probe ergibt – wieder unter Anwendung trigonometrischer Umformungen - die Gültigkeit von DGL (I) → selbst durchführen.

Ein weiteres Beispiel wird in **Übungsblatt 06, Aufgabe 2**, dargestellt.

17.6 Stationäre DGL-Lösungen mit Hilfe komplexer Zeigergrößen

Ist man nur an der stationären Lösung einer linearen DGL mit sinusförmiger Anregung („rechte Seite“) interessiert, kann man aus der DGL mithilfe der komplexen Rechnung eine algebraische Gleichung abspalten, die ausschließlich die gesuchten Größen „Amplitude“ und „Phasenwinkel“ in Abhängigkeit der Frequenz ω enthält. Dieser Weg wird bei der komplexen Wechselstromrechnung verwendet. Die Grundlage dafür bilden die Eulerformeln der trigonometrischen Ausdrücke. Für die Spannung $u_C = u_C(t)$ gilt bei Reihenschaltung eines Widerstandes R und eines Kondensators C die DGL:

$$T_1 \frac{du_C}{dt} + u_C = u_q(t) \quad (I)$$

Ist die Speisespannung sinusförmig und gegenüber einem willkürlich festgelegten Nullpunkt $t=0$ bereits um den Winkel ϕ phasenverschoben, wird sie durch folgenden Ausdruck beschrieben.

$$u_q(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) = \hat{u} \cdot \frac{e^{j(\omega \cdot t + \phi)} - e^{-j(\omega \cdot t + \phi)}}{2j}$$

Die stationäre Lösung $u_{C\infty}$ für die Kondensatorspannung hat wieder den Ansatz

$$u_{C\infty}(t) = \hat{u}_c \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_c) = \hat{u}_c \cdot \frac{e^{j(\omega \cdot t + \phi_c)} - e^{-j(\omega \cdot t + \phi_c)}}{2j}$$

mit der Ableitung

$$\dot{u}_{C\infty}(t) = \hat{u}_c \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_c) = \hat{u}_c \cdot \omega \cdot \frac{e^{j(\omega \cdot t + \phi_c)} + e^{-j(\omega \cdot t + \phi_c)}}{2} = \hat{u}_c \cdot \omega \cdot j \frac{e^{j(\omega \cdot t + \phi_c)} + e^{-j(\omega \cdot t + \phi_c)}}{2j}$$

Verwendet man nur die komplexen Ausdrücke, so wird aus der DGL (I) die Gleichung

$$\hat{u}_{C\infty} \cdot T_1 \cdot \omega \cdot j \frac{e^{j(\omega \cdot t + \phi_c)} + e^{-j(\omega \cdot t + \phi_c)}}{2j} + \hat{u}_{C\infty} \cdot \frac{e^{j(\omega \cdot t + \phi_c)} - e^{-j(\omega \cdot t + \phi_c)}}{2j} = \hat{u} \cdot \frac{e^{j(\omega \cdot t + \phi)} - e^{-j(\omega \cdot t + \phi)}}{2j} \quad (II)$$

Der Nenner kann gekürzt werden:

$$\hat{u}_{C\infty} \cdot j T_1 \cdot \omega \cdot [e^{j(\omega \cdot t + \phi_c)} + e^{-j(\omega \cdot t + \phi_c)}] + \hat{u}_{C\infty} \cdot [e^{j(\omega \cdot t + \phi_c)} - e^{-j(\omega \cdot t + \phi_c)}] = \hat{u} \cdot [e^{j(\omega \cdot t + \phi)} - e^{-j(\omega \cdot t + \phi)}]$$

$$\hat{u}_{C\infty} \cdot [(1 + j T_1 \omega) e^{j(\omega \cdot t + \phi_c)} - (1 - j T_1 \omega) e^{-j(\omega \cdot t + \phi_c)}] = \hat{u} \cdot [e^{j(\omega \cdot t + \phi)} - e^{-j(\omega \cdot t + \phi)}]$$

Die Terme mit $e^{-j(\omega \cdot t + \phi)}$ sind konjugiert komplex zu denen mit $e^{j(\omega \cdot t + \phi)}$, man kann sie weglassen, da sie keine zusätzlichen Informationen enthalten. Dies ist im Übrigen der Schritt, in dem man von der bis hierhin insgesamt rein reellen zur komplexen Rechnung übergeht. Es bleibt

$$\hat{u}_{C\infty} \cdot (1 + j T_1 \omega) e^{j(\omega \cdot t + \phi_c)} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \phi)}$$

Der zeitabhängige Teil mit $e^{j\omega \cdot t}$ lässt sich herauskürzen:

$$\hat{u}_{C\infty} \cdot (1 + j T_1 \omega) e^{j\phi_c} = \hat{u} \cdot e^{j\phi} \quad (III)$$

Betrag und Phasenwinkel sind links und rechts gleich:

$$\arg[(1 + j T_1 \omega) e^{j\phi_c}] = \arg[\hat{u} \cdot e^{j\phi}] = \phi = \phi_c + \arctg(T_1 \omega) \rightarrow \phi_c = \phi - \arctg(T_1 \omega)$$

$$|\hat{u}_{C\infty} (1 + j T_1 \omega) e^{j\phi_c}| = |\hat{u} \cdot e^{j\phi}| = \hat{u} = \hat{u}_{C\infty} \cdot \sqrt{1 + (T_1 \omega)^2} \rightarrow \hat{u}_{C\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}} \hat{u}$$

Damit liegt die stationäre Kondensatorspannung als komplexe Zeigergröße

$$\tilde{U}_{C\infty} = \tilde{U}_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot u_{C\infty} \cdot e^{j\phi_c} \text{ in Beziehung zum komplexen Zeiger } \tilde{U}_q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{u} \cdot e^{j\phi} \text{ der}$$

Quellenspannung u_q vor (man verwendet nicht den Amplituden-, sondern den Effektivwert):

$$\tilde{U}_c = \frac{1}{(1 + j T_1 \omega)} \cdot \tilde{U}_q$$

Wenn wieder die reellen Ausdrücke benötigt werden (was selten der Fall ist), lassen sich diese durch die rückwärtigen Schritte erzeugen.

17.7 Numerisches Lösen von (fast) beliebigen gewöhnlichen DGLs

Bei praktisch vorkommenden Aufgabenstellung lassen sich nur für die wenigsten Differentialgleichungen Lösungen in geschlossener Form angeben. Hier helfen Mathematikpakete wie Scilab, Matlab, Mathematica und andere mit numerischen Verfahren.

Deren Verwendung setzt aber tiefe und umfangreiche Kenntnisse über die Eigenschaften von DGLs und deren Lösungen voraus, wie sie in den vorangegangenen Kapiteln teilweise behandelt wurden. Andernfalls ist man nicht in der Lage, die Ergebnisse der numerischen Lösungen ausreichend sicher auf Plausibilität zu prüfen und wird zum „Sklaven“, der den Ergebnissen ausgeliefert ist.

Überhaupt bestehen die Ingenieur-Aufgaben darin

- einen technischen Sachverhalt zu verstehen und zu beschreiben
- eine Lösung für eine Aufgabenstellung anzugeben
- zur Bearbeitung der Lösung gegebenenfalls – und bei umfangreichen Aufgabestellungen unbedingt - Programme laufen zu lassen, um sich von (stupider) Rechenarbeit frei zu halten
- die Ergebnisse zu beurteilen.

Für das kostenfrei installier- und nutzbare Paket **Scilab** sind im Folgenden einige Beispiele gegeben. Sie teilen sich immer in zwei Schritte:

- Formulierung der DGL als programmierte Funktionen
- Ausführung der Lösung.

Vielleicht sieht man es am ehesten an einigen Beispiel-**Skripten** (= ausführbaren Programmen).

17.7.1 Beispiele für das numerisches Lösen von DGLs erster Ordnung

- 1) Es soll die lineare DGL erster Ordnung $T_1 \dot{y} + y = 1$ numerisch gelöst werden.

Dazu wird die DGL nach ihrem Differentialquotienten

$$\dot{y} = -y + 1$$

aufgelöst und als Funktion *function* mit dem Namen *f* eingegeben. Der Name ist frei wählbar. Die Lösung erfolgt in einem weiteren Programmteil mit der eigentlichen Lösungsfunktion *ode* (=ordinary differential equation) und wird mit der Zeichenfunktion *plot* ausgegeben.

Das folgende Skript (=Programm) tut dies in einer absoluten „Magerversion“ ohne alle Beschriftungen und ist daher kein Vorbild, zeigt aber immerhin das grundsätzliche Vorgehen. Andererseits lässt es sich durch einige Zusatzanweisungen auf Publikationsreife (Bachelorarbeit) erweitern. Man kann es aus diesem Skript herauskopieren und in das Fenster **Scilab-Notes** einfügen – oder eintippen:

Die Angaben hinter dem Doppel-Slash **//** sind Kommentare ohne Bedeutung für den Programmablauf und dienen nur der Erläuterung.

// Dies ist die Funktion, welche die Gleichung mit der Ableitung enthält:

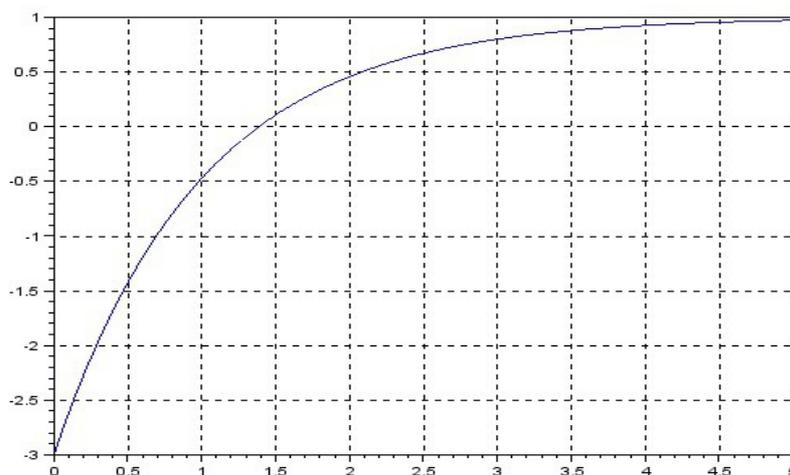
```
function ydot=f(t, y)  
ydot=1/T1*(1-y); // Dies ist die Zeile mit der Ableitung  
endfunction
```

// Hier steht das eigentliche Programm:

```
clf  
T1=1;  
y0=-3; // Hier steht die Anfangsbedingung y0 = y(t=0)  
t0=0; // Die Startzeit
```

```
te=5;      // Die Endzeit
dt =0.01; // Die Unterteilung des Zeitbereichs in Schritte der Dauer dt
t=t0:dt:te; // Die Unterteilung von t0 bis te
y=ode(y0,t0,t,f); // Die eigentliche Funktion zum Lösen der DGL in Schritten dt
plot(t,y)  // Erzeugen eines Diagramms der Lösung
xgrid      // Einfügen eines Gitternetzes zum besseren Ablesen
```

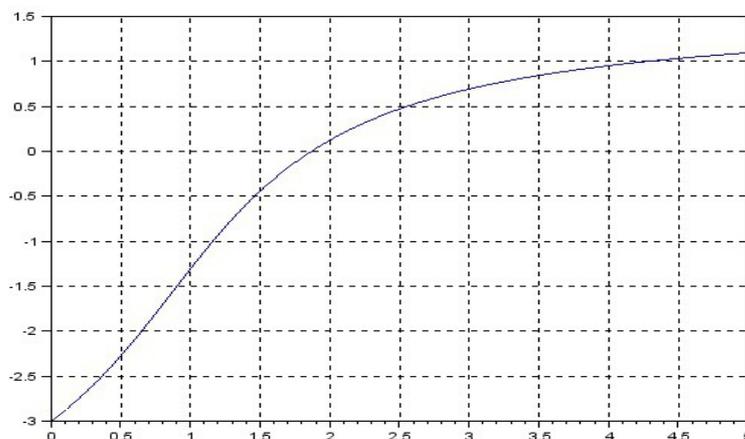
Als Ergebnis erhält man folgendes Diagramm für $y(t)$:



2) Nun lassen sich aber auch nichtlineare DGLs lösen, z. B. $T_1 \cdot \dot{y} + \sin(y) = 1$.
Im obigen Skript wird nur die Ableitung in der Funktion f ausgetauscht:

```
function ydot=f(t, y)
ydot=1/T1*(1-sin(y)); // Dies ist die Zeile mit der neuen Ableitung
endfunction
```

Diagramm für $y(t)$:

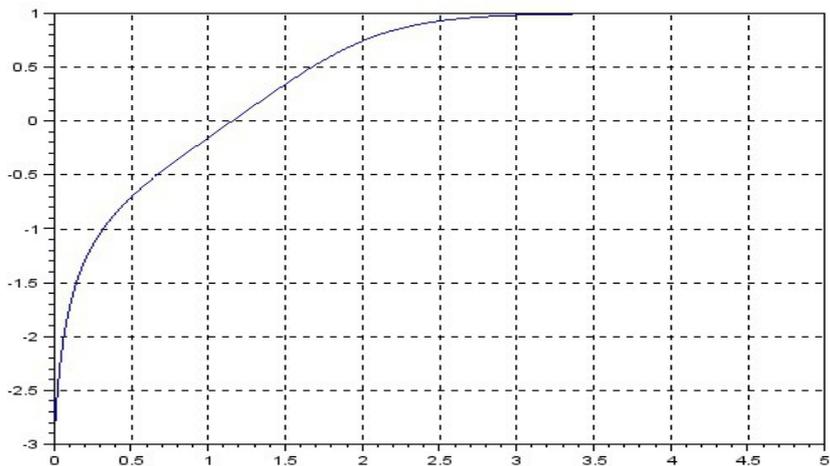


3) Oder $T_1 \cdot \dot{y} + y^3 = 1$

```
function ydot=f(t, y)
    ydot=1/T1*(1-y^3);
endfunction
```

// Dies ist die Zeile mit der neuen Ableitung

Diagramm für y(t):



Es ist sehr nützlich, alles mal mit **Scilab** auszuprobieren und eigene DGLs einzubringen, es ist nicht schwer.

Im Übungsblatt 07 findet man entsprechende Vorschläge.

17.7.2 Beispiele für das numerische Lösen von DGLs höherer Ordnung

DGLs n-ter Ordnung werden als Vorbereitung für das numerische Lösen in ein System von n gekoppelten DGLs erster Ordnung umgewandelt: In verschiedenen ingenieurtechnischen Vertiefungsgebieten (u. a. Nachrichten-, Antriebs-, Energie-, Regelungs-, Maschinen-, Hochbau-Technik) erfolgt eine eingehende Behandlung hierzu. An dieser Stelle folgen nur einige Hinweise.

Liegt die DGL für $x=x(t)$ in der Form

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = y(t)$$

vor, kann man sie mit den Hilfsgrößen (=Zustandsgrößen) z_1, z_2, \dots, z_n in der sogenannten Regelungsnormform als

$$z_1(t) = a_0 \cdot x(t)$$

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

....

$$\dot{z}_n = -a_0 \cdot z_1 - a_1 \cdot z_2 - \dots - a_{n-1} \cdot z_n + y(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{a_0} \cdot z_1$$

darstellen.

1) Beispiel: $\ddot{x} + \dot{x} + x = 1 \rightarrow 2$ Zustandsgrößen z_1, z_2

$$z_1 = x \quad \dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = -z_1 - z_2 + 1$$

$$x(t) = z_1$$

Skript:

```
function zdot=f(t,z)
```

```
    zdot(1) =z(2);
```

```
    zdot(2) =-z(1)-z(2)+1;
```

```
endfunction
```

```
clf;
```

```
z0=[0,0]';
```

```
t0=0;
```

```
t=0:0.1:10;
```

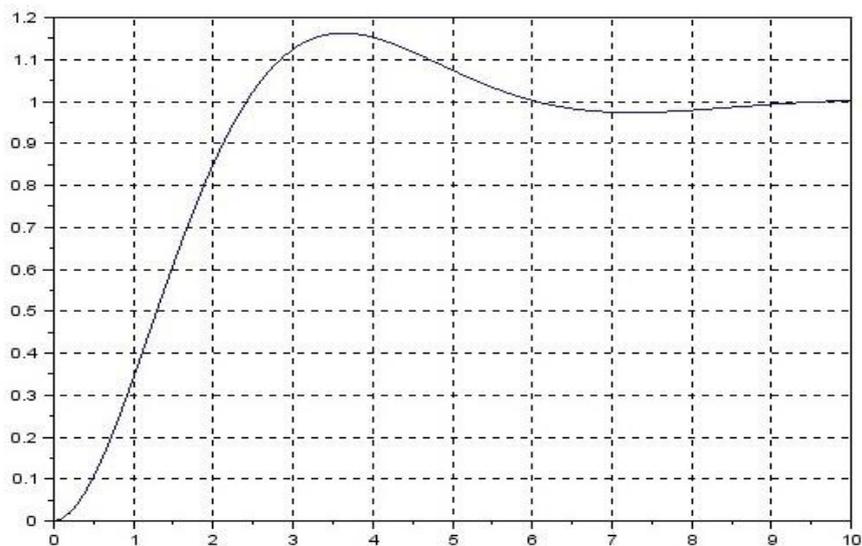
```
z=ode(z0,t0,t,f);
```

```
x=z(1,:) // Zuweisung von z(1) an x(t)
```

```
plot(t,x)
```

```
xgrid
```

Diagramm für $x(t)$:

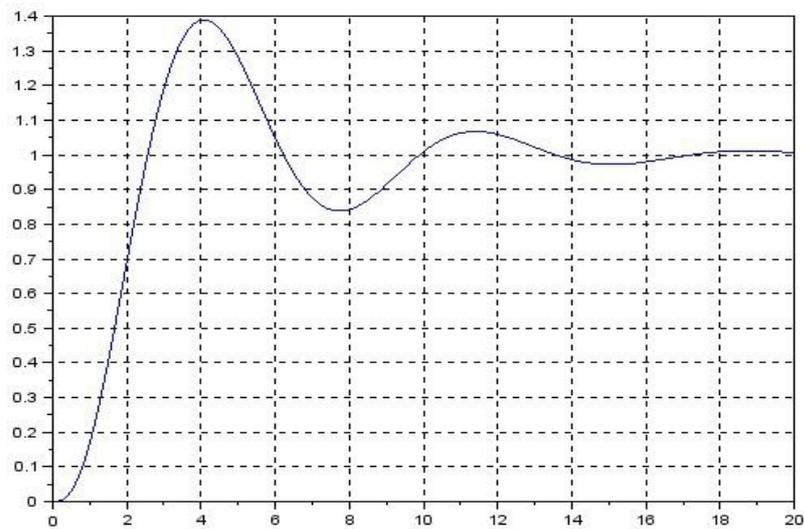


2) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 1$:3 Zustandsgrößen z_1, z_2, z_3

Skript:

```
function zdot=f(t,z)
  zdot(1)=z(2);
  zdot(2)=z(3)
  zdot(3)=-2*z(1)-2*z(2)-3*z(3)+1;
endfunction
clf;
z0=[0,0,0]';
t0=0;
te=20
t=t0:0.1:te;
z=ode(z0,t0,t,f);
x=2*z(1,:);
plot(t,x)
xgrid
```

Diagramm für x(t):



Dieses Verfahren ist auch für nichtlineare DGLs anwendbar (probieren!), allerdings benötigt man oft weitere Kenntnisse, um brauchbare Ergebnisse zu erzielen.

18 Skalar- und Vektorfelder

In der Ingenieur-Technik verwendet man zur Beschreibung von räumlichen Werteverteilungen die Funktionen für skalare Felder V

$$V = V(x, y, z)$$

(z. B. Raumtemperatur an allen Punkten eines Hörsaales, elektrisches Potential im Raum zwischen zwei Elektroden)

oder für Vektorfelder F

$$F = [F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)]$$

(z. B. dreidimensionale Magnetfeldvektoren in allen Punkten in und um eine stromdurchflossene Spule).

Diese Funktionen gibt es auch für ebene Anordnungen in zwei Raumdimensionen

$$V = V(x, y)$$

$$F = [F_x(x, y), F_y(x, y)]$$

bei Skalar – oder eindimensionalen Feldern außerdem für nur eine Raumdimension

$$V = V(x)$$

$$F = F_x(x)$$

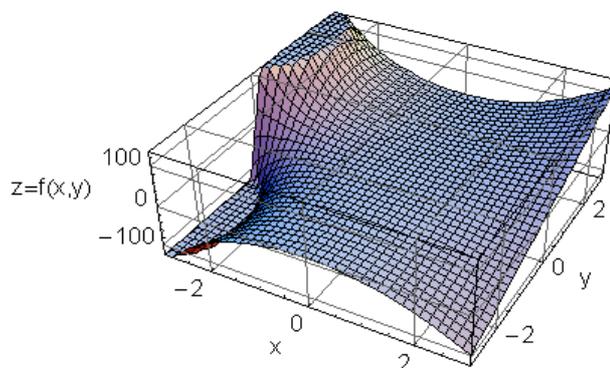
Zur Kennzeichnung charakteristischer Besonderheiten dieser Felder sind die Funktionen Divergenz **div** und Rotation **rot** definiert. Bei skalaren Feldern interessiert außerdem die Richtung des steilsten An- oder Abstiegs der Werte im Raum. Hierfür bestimmt den Gradienten **grad** (z. B. den Temperaturgradienten über einem Landstrich der Erde in jedem Punkt)

18.1 Skalarfelder

Ein Skalarfeld kann z. B. eine Funktion sein, wie sie ähnlich in Kapitel 15 definiert war:

$$V(x, y) = x^2 \cdot (4 \cdot y + 1) - \sin(y) \cdot e^{-2x}$$

Es ist zweidimensional und lässt sich im Gegensatz zu dreidimensionalen Skalarfeldern unmittelbar als Raumfläche darstellen: Jedem Punkt der x-y-Ebene ist über die Funktion V wenigstens ein Punkt der vertikalen Koordinate zugeordnet



Bei dreidimensionalen Skalarfeldern, z. B. $V(x, y, z) = x + y^2 + zx$, gehört zu jedem Punkt des x-y-z-Raumes wenigstens ein Punkt der vierten Koordinatenrichtung V , was räumlich nicht mehr darstellbar ist. Man kann ersatzweise jedoch Raumflächen mit jeweils konstant gehaltener z -

Koordinate erzeugen und diese dann nebeneinander betrachten, um die Veränderungen zu sehen.

18.2 Gradientenfelder, Vektorfelder

Im Gegensatz zu Skalarfeldern ist bei einem Vektorfeld jedem Punkt der x-y-Ebene ein zweidimensionaler Feldvektor $F=[F_x(x,y), F_y(x,y)]$ zugeordnet. Jede Komponente kann für sich eine zweidimensionale Funktion sein. Für dreidimensionale Felder gilt Entsprechendes:

$$F=[F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)] .$$

Ein Sonderfall zwei- oder dreidimensionaler Felder entsteht, wenn die Feldkomponenten als partielle Ableitungen aus einem Skalarfeld hervorgehen.

$$F=\text{grad} V(x,y,z)=\left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right]$$

Hinweis: In der Elektrotechnik ist für elektrische Felder aus (Spannungs-) Potenzialfeldern ein negatives Vorzeichen vorgesehen:

$$F=-\text{grad}[V(x,y,z)]=-\left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right]$$

18.3 Divergenz

Vektorfelder können in einzelnen Punkten durch Quellen gespeist (vergrößert) oder durch Senken vermindert werden. Dies lässt sich mithilfe der Divergenz div bestimmen. Sie ist eine skalare Funktion.

$$\text{div}(F)=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Positive Werte der Divergenz in einem Punkt bedeuten Quellen, negative sind Senken. Ist die Divergenz eines Feldes in jedem Punkt 0,

$$\text{div}(F)=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=0 ,$$

so liegt ein quellenfreies Feld vor.

Hinweis: In der Literatur werden die Argumentklammern oft weggelassen.

18.4 Rotation

Die Untersuchung eines **dreidimensionalen** Feldes auf Wirbel erfolgt durch die Bestimmung der Rotation rot . Die Rotation ist ein dreidimensionaler Vektor:

$$\text{rot}(F)=\left[\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right] .$$

Ist $\text{rot}(F)=0$, so liegt ein wirbelfreies Feld vor. Gradientenfelder sind immer wirbelfrei.

Hinweis: In der Literatur werden die Argumentklammern oft weggelassen.

18.5 Nabla- und Laplace-Operatoren

Als abkürzende Schreibweise sind zwei Operatoren definiert.

- Der Nabla-Operator ∇ entspricht dem Gradienten grad: $\nabla(V) = \text{grad}(V)$
- Der Laplace-Operator entspricht der zweimaligen Ausführung des Nabla-Operators:
$$\Delta(V) = \nabla \nabla(V) = \text{div}(\text{grad}(V))$$

18.6 Partielle Differenzialgleichungen

Wie bei den gewöhnlichen Differenzialgleichungen können auch die partiellen Ableitungen einer Funktion in einer Gleichung verknüpft sein. Hier wie dort ist die Aufgabe, eine Funktion zu finden, welche diese Gleichung erfüllt. Beispiel für ein dreidimensionales elektrisches Potentialfeld

$$V = V(x, y, z) = ?$$

$$\Delta(V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{raumladungsfreies Gebiet})$$

Dies ist ungleich schwieriger, als das Lösen algebraischer Gleichungen. Nur in Sonderfällen gibt es solche Lösungsfunktionen als geschlossene Ausdrücke. Jedoch lassen sich oft wenigstens numerische Lösungen finden.

Bei technischen Aufgabenstellungen kommen Rand- und/oder Anfangsbedingungen dazu, welche die gesuchte Funktion zusätzlich erfüllen muss.

Anmerkung: Im vorliegenden Fall gelingt die Lösung durch einen Separationsansatz

$$V = V(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Hierdurch entstehen aus der einen partiellen DGL drei gewöhnliche DGLs.

(wird fortgesetzt) Zylinder- und Kugelkoordinaten

Die Festlegung eines Koordinatensystems zur Beschreibung technischer Anordnungen mit Hilfe von Funktionen ist willkürlich und kann unabhängig erfolgen. Oft ist die Wahl kartesischer x-y-z-Koordinatensysteme zweckmäßig. Bei rotations- oder kugelsymmetrischen Anordnungen vereinfachen sich die Beschreibungen aber, wenn man Zylinder- oder Kugelkoordinaten-Systeme verwendet. Alle drei lassen sich dabei ineinander umformen.

18.7 Zylinderkoordinaten

Durch Projektion eines Punktes $P(x, y, z)$ im dreidimensionalen Raum auf die x-y-Ebene können die x- und die y-Koordinate auch als

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos(\phi) \quad , & y &= \rho \cdot \sin(\phi) \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad , & \phi &= \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad . \end{aligned}$$

dargestellt werden. Es entspricht der Komponentenschreibweise bei ebenen Vektoren. - Die z-Koordinate bleibt unverändert.

Für rotationssymmetrische Anordnungen wie Zylinder ist diese Darstellung besonders zweckmäßig, da Koordinaten auf Kreisen um die Drehachse konstante Radien ρ haben.

18.8 Kugelkoordinaten

Bei der Darstellung von $P(x,y,z)$ in Kugelkoordinaten ist r der Abstand zum Nullpunkt. Der Winkel ϕ - auch Azimut oder Deklination genannt - bezeichnet den Winkel der Projektion von r in der x - y -Ebene. r entspricht der geographischen Länge. Der Winkel θ ist der Winkel des Radius r zur x - y -Ebene – auch Elongation oder oder Rektaszension genannt. Für die Erdkugel entspricht er geographischen Breite.

Die Umrechnung erfolgt über

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \quad , \quad y = r \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \quad , \quad z = r \cdot \cos(\theta) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \phi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad \theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) .\end{aligned}$$

18.9 Beschreibung von Feldfunktionen in Zylinder- oder Kugelkoordinaten

Da in technischen Anordnungen häufig Skalar- und Vektorfelder mit achsenrotations- oder kugelsymmetrischen Eigenschaften vorliegen, ist es zweckmäßig, die entsprechenden Funktionen in passenden Koordinatensystemen zu beschreiben, da der Aufwand hierfür geringer ausfällt als in rechtwinkligen (kartesischen) Koordinaten.

Z. B. für den Gradienten:

$$\text{Zylinderkoordinaten: } \text{grad}(V) = \left[\frac{\partial V}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi}, \frac{\partial V}{\partial z} \right]$$

$$\text{Kugelkoordinaten: } \text{grad}(V) = \left[\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right]$$

Für Divergenz, Rotation und Laplace-Operator bitte in Formelsammlungen nachsehen.

18.10 Die Maxwell'schen Gleichungen als Beispiel für Feldfunktionen

In (fast) allen Lehrbüchern der Elektrotechnik findet man die genialen 4 Maxwell'schen Grundgleichungen in ihrer differentiellen Form. Zusammen mit zwei Materialgleichungen (Einfluss von Materialeigenschaften) beschreiben sie alle Zusammenhänge der elektrischen Erscheinungen ruhender Medien in äußerst kompakter Form. Mit

E: elektrische Feldstärke

D: elektrische Verschiebung oder elektrische Flussdichte

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante

ϵ_r : Dielektrizitätszahl oder Permittivitätszahl

$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$: Dielektrizitätskonstante

ρ : Raumladungsdichte

H: magnetische Feldstärke

B: magnetische Induktion oder magnetische Flussdichte

μ_0 : magnetische Feldkonstante

μ_r : Permeabilitätszahl

$\mu = \mu_r \cdot \mu_0$: Permeabilität

j: vektorielle elektrische Verschiebungsstromdichte (**nicht** imaginäre Einheit !)

sind die an - Einfachheit wohl nicht zu überbietenden - Maxwell'schen Gleichungen (nach **James Maxwell**, 1831 – 1879):

$$\operatorname{div} D = \rho \quad (\text{Raumladungen sind die Quellen der elektrischen Verschiebung})$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (\text{Magnetfelder sind quellenfrei})$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{dB}{dt} \quad (\text{statische, zeitunveränderliche elektrische Felder sind wirbelfrei})$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{dD}{dt} + j \quad (\text{Induktionsgesetz})$$

und die beiden Materialgleichungen:

$$D = \epsilon \cdot E$$

$$B = \mu \cdot H \quad .$$

19 Anmerkungen zur Informationstechnik

In Alltag haben wir es fast flächendeckend mit großen Mengen von Daten in analoger oder digitaler Form zu tun, die von einem Ort zum anderen übertragen und gespeichert werden müssen, z. B. Texte, Bilder, Programme, Musik, Kontenhalte und vieles mehr. Dabei fallen u. a. zwei Aufgaben an:

- Analyse der Häufigkeit einzelner Daten-Zeichen und Entwicklung von Verfahren, diese mit möglichst geringem Platz-Verbrauch darzustellen (Kompression).
- Entwicklung von Verfahren, um durch zufällige, unvermeidliche Störungen verfälschte Daten möglichst fehlerfrei zu rekonstruieren (Fehlerkorrektur).

Zur Beschreibung der damit gegebenen Zusammenhänge verwendet die Nachrichten- und Informationstechnik Begriffe, von denen hier einige Wenige, aber oft Gebrauchte genannt werden. Dabei handelt es sich allerdings um grob vereinfachende Kurzbeschreibungen. Für Details siehe z. B. *Wilfried Dankmeier, Grundkurs Codierung, Vieweg-Verlag 2006* (neue Auflage in Arbeit)

Zeichenmenge: Eine Menge endlich vieler Zeichen oder Symbole, mit denen Daten dargestellt werden können, z. B. die Buchstaben und Zeichen eines Alphabets. In der deutschen Sprache sind es mit Groß und Kleinschreibung, Ziffern und Satzzeichen etwa 80.

Zeichenhäufigkeit: Eine Maßzahl zwischen 0 und 1, mit welcher angegeben wird, wie häufig ein Zeichen im Verhältnis zu den anderen der Zeichenmenge über eine große Gesamtzahl enthalten ist. Z. B. kann es sich um das Auftreten des Buchstabens „a“ in der Tagesausgabe einer Zeitung oder über alle Ausgaben eines Jahres handeln. Berücksichtigt man etwa nur die Menge aller Buchstaben ohne Unterscheidung der Groß- und Kleinschreibung, so ist die Auftrittshäufigkeit für „a“ etwa $P(a) = 0.043$.

Wahrscheinlichkeit eines Zeichens: Kann man das Auftreten eines Zeichens nicht vorhersagen, weil es „zufällig“ auftritt, lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen aber angeben, mit welcher Sicherheit das Zeichen in einem Datenstrom als Nächstes erscheinen wird. Besteht ein Datenstrom z. B. nur aus Buchstaben ohne Unterscheidung von Groß- und Kleinschreibung, kann man das Zeichen „a“ in 0.043 aller möglichen Fälle erwarten – im Mittel wird also etwa jedes zwanzigste Zeichen ein „a“ sein. Es gilt:

$$0 \leq P(\text{Zeichen}) \leq 1 \quad .$$

Tritt ein Zeichen nie auf, wird ihm die Wahrscheinlichkeit 0 zugeordnet, tritt es immer auf, hat es die Wahrscheinlichkeit 1.

Entropie H eines Zeichens: Gibt den technischen Informationsgehalt eines Zeichens an. Ein seltenes Zeichen hat einen hohen, ein häufiges Zeichen einen geringen Informationsgehalt. **Claude Elwood Shannon** hat diesen elementaren Begriff präzisiert:

$$H = -\log_2(P(\text{Zeichen})) \quad .$$

Das negative Vorzeichen stellt sicher, dass die Entropie immer größer oder gleich Null ist, da es sich bei der Zeichenwahrscheinlichkeit um eine Zahl zwischen Null und 1 handelt, s. o.

Mittlere Entropie \bar{H} der Zeichen Z_i einer Zeichenmenge mit n verschiedenen Elementen: Sie gibt an, mit wie vielen Bits ein Zeichen der Menge im Mittel dargestellt werden kann:

$$\bar{H} = -\sum_{i=1}^n P(Z_i) \cdot \log_2(P(z_i)) \quad .$$

Diese Angabe ist für die Datenkompression (LZW, JPEG, MP3 usw.) von Bedeutung, da sie Auskunft darüber gibt, wie viel Platz im Mittel zur Speicherung oder Übertragung eines Datenstroms gespart werden kann.

Verbundwahrscheinlichkeit (wird ergänzt)

Bedingte Wahrscheinlichkeit (wird ergänzt)

Bayes-Formel (wird ergänzt)

20 Literatur

- Papula:** Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bände 1, 2 und Formelsammlung, Vieweg, 2007
- Papula:** Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Klausur- und Übungsaufgaben, Vieweg, 2007
- Engeln-Müllges, Schäfer, Trippler:** Kompaktkurs Ingenieurmathematik, Hanser Fachbuchverlag Leipzig, 2004
- Burg, Haf, Wille:** Höhere Mathematik für Ingenieure I, II, Teubner, 2008
- Bronstein-Semendjajew:** Taschenbuch der Mathematik, 6. Auflage, Verlag Harri Deutsch, 2005
- Dankmeier:** Grundkurs Codierung, 3. Auflage, Vieweg, 2006