Trainingsaufgaben – Teil 2

Ergebnisse

Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen $z_1=3+i\cdot 1$, $z_2=-1+i\cdot 2$ mit $i=\sqrt{-1},\ i^2=-1$.

Berechnen Sie

a) $|(z_1)|$ → *3.16*

b) $|(z_2)|$ → *2.24*

c) $z_3=z_1+z_2$ → *2.0 + i 3.0*

d) $z_4=z_1-z_2$ → *4.0 – i 1.0*

e) $z_5=z_1\cdot z_2$ → *-5.0 + i 5.0*

f) $z_6=\overline{z_2}$ → *-1.0 – i 2.0*

g) $z_7=\dfrac{z_1}{z_2}$ → *-0.2 – i 1.4 (Zähler und Nenner mit* $\overline{z_2}$ *erweitern!)*

jeweils in der kartesischen Normalform $z=a+i\cdot b$.

Aufgabe 2

Stellen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 1c – 1g) als Zeiger in der komplexen Ebene dar.

Aufgabe 3

Die Mandelbrotfolge ist definiert als $z_{k+1}=z_k^2+c,\quad z_0=0+i\cdot 0,\quad c=a+i\cdot b,\quad a,\ b\in R$.

Ermitteln Sie für $c=-1-i\cdot 0.5$, ob die Folge konvergiert oder divergiert.

Hinweis: die Mandelbrotfolge divergiert, wenn ein Folgenglied irgendwann den Betrag $|(z_k)|>2$ annimmt.

Nach Durchlauf 5 ist $|(z_5)|=2.765$ *, also divergiert diese Folge.*

Aufgabe 4

Bestimmen Sie mithilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus (soweit möglich) die modularen inversen Zahlen d zu :

a) $(35\cdot d)\mathrm{MOD}\ \ 54$ → *d=17*

b) $(13\cdot d)\mathrm{MOD}\ \ 31$ → *d=12*

c) $(21\cdot d)\mathrm{MOD}\ \ 54$ → *es existiert keine Inverse, da ggT(21,54) =3*

Tipp: Verwenden Sie das Hilfsblatt EA.pdf

Auch in ueb_02.pdf mit LV, Aufgaben 3 und 4 finden Sie ausführliche Verfahrensbeschreibungen.

Aufgabe 5

Schreiben Sie die folgenden binomischen Ausdrücke mithilfe der Binomialkoeffizienten als Summen in Lang- und in Kompaktform

a) $(z+1)^4$

$\rightarrow \binom{4}{0}z^4+\binom{4}{1}z^3+\binom{4}{2}z^2+\binom{4}{3}z^1+\binom{4}{4}z^0=z^4+4z^3+6z^2+4z+1$

b) $(x+y)^n,\ n\in N$

$\rightarrow x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}z^{n-2}y^2+\ \dots\ +\binom{n}{n-1}z^1y^{n-1}+\binom{n}{n}z^0y^n$

c) $(a+b+c)^4$

$\rightarrow (a+b+c)^2\cdot(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)^{2,}$ usw.

Aufgabe 6

Geben Sie das Bildungsgesetz für die Elemente der Folgen an:

a) $A_1=3,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{4,}\ -\frac{3}{8},\ \frac{3}{10,}\ \dots \rightarrow a_n=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b) $A_2=1,\ 2,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{4},\ 2\frac{7}{8},\ \dots \rightarrow a_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}$

c) $A_3=3,\ 4,\ 3.3,\ 3.4,\ 3.33,\ 3.34,\ 3.333,\ 3.334,\ \dots \rightarrow a_n=3\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot 10^{\left(-\frac{n-1}{2}\right)}$

d) $A_4=1,\ 11,\ 2,\ 12,\ 2\frac{1}{2},\ 12\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{4},\ 12\frac{3}{4},\ \dots \rightarrow a_n=3-\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}}$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Werte der Summen:

a) $S_1=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\nu}{\nu+2} \rightarrow \frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}=?$

b) $S_2=\sum_{i=1}^{n}(2\cdot i-1)$

$\rightarrow 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ *(hier in Formelsammlung nachsehen)*

c) $S_3 = \sum_{k=1}^{n-1} y^k$

$\rightarrow \quad S_3 = y^1 + y^2 = y(1+y)$

Allgemein: geometrische Reihe bis n-1

$$S_n = y^1 + y^2 + y^3 + ... + y^{n-1} = y(1 + y + y^2 + ... + y^{n-2})$$

$$S_n = y \cdot \frac{y^n - 1}{y-1} \quad \rightarrow \quad S_3 = y \cdot \frac{y^2-1}{y-1} = y \cdot \frac{(y+1)\cdot(y-1)}{y-1} = y(1+y)$$ *, s. o.*

d) $S_n = \sum_{\mu=1}^{n} \mu \quad \rightarrow \quad 1+2+3+4+...+n = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ *(berühmte Gauß'sche Formel)*

Aufgabe 8

Ein Regierungschef will für einen Lösungsvorschlag in einem internationalen Konflikt werben, von dem n Staaten betroffen sind. Dazu möchte er zunächst Einzelgespräche mit den (n-1) anderen beteiligten Regierungschefs führen und lässt sich von seinem Büro eine zusammenhängende Route ausarbeiten. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Vom Start zum ersten Ziel gibt es (n-1) Möglichkeiten, von jedem weiteren der (n-1)-Ziele gibt es je (n-2) Möglichkeiten usw., also insgesamt $(n-1)!$ *Möglichkeiten. Eine in vielen praktischen Aufgabenstellungen ist es z. B. , die kürzeste Gesamtstrecke zu ermitteln, eine – nicht sehr einfache Aufgabe der Optimierung.*

Aufgabe 9

Geben Sie mithilfe von Summen- und Produktzeichen je einen kompakten Ausdruck für die Polynome

a) $y_1 = x^n - a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} - a_{n-3} \cdot x^{n-3} + \ ... + \ a_1 \cdot x - a_0$

$\rightarrow \quad y_1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot a_{n-k} \cdot x^{(n-k)}, \quad a_n = 1, \ n \in N, \quad n \quad \text{ungerade}$

b) $y_2 = (x+x_1)\cdot(x+x_2)\cdot .....\cdot(x+x_n) \quad \rightarrow \quad y_2 = \prod_{k=1}^{n} (x+x_k)$

an.

Aufgabe 10

Wie hängen beim Polynom in Nullstellenform

$f(x) = (x+x_1)\cdot(x+x_2)\cdot(x+x_3)\cdot(x+x_4)\cdot(x+x_5)$

die Nullstellen mit den Koeffizienten des Polynoms in der Koeffizientenform

$$f(x) = x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

zusammen?

Siehe Satz von Vieta (Skript!):

$$a_0 = \prod_{k=1}^{5} x_k \quad ,$$

$$a_1 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 + \ldots$$ *(Summe aller Vierer-Produkte)*

$$a_2 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + \ldots$$ *(Summe aller Dreier-Produkte)*

$$a_3 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_5 + x_2 \cdot x_3 + \ldots$$ *(Summe allerZweier-Produkte)*

$$a_4 = \sum_{k=1}^{5} x_k$$ *(Summe)*

$$a_5 = 1$$

Siehe auch ueb_03.pdf, Aufgabe 4

Aufgabe 11

Welcher Betrag x steht bei monatlicher Einzahlung von k Euro und einem jährlich verrechneten Zinssatz p nach n Jahren zur Verfügung?

Nach Jahr 1: $x_1 = 12k + (k + \frac{11}{12} \cdot k + \frac{10}{12} \cdot k + \ldots + \frac{1}{K}) \cdot p = 12k + \frac{1}{12} \cdot \binom{12}{2} \cdot k \cdot p = 12k + \frac{11}{2} \cdot k \cdot p$

(Die monatlichen Teilbeträge werden jeweils anteilig auf das Jahr verzinst)

Nach Jahr 2: $x_2 = x_1 \cdot (1+p) + x_1 = x_1 \cdot (2+p)$

(Betrag aus Jahr 1 + Zinsen + verzinster Betrag aus Jahr 2)

Nach Jahr 3: $x_3 = x_2 \cdot (1+p) + x_1 = x_1 \cdot (2+p)(1+p) + x_1 = x_1 \cdot (3 + 3p + p^2)$

Nach Jahr 4: $x_4 = x_3 \cdot (1+p) + x_1 = x_1 \cdot (3 + 3p + p^2) \cdot (1+p) + x_1 = x_1 \cdot (4 + 6p + 4p^2 + p^3)$

Nach Jahr 5:

$$x_5 = x_4 \cdot (1+p) + x_1 = x_1 \cdot (4 + 6p + 4p^2 + p^3) \cdot (1+p) + x_1 = x_1 \cdot (5 + 10p + 10p^2 + 5p^3 + p^4)$$

Bestimmen Sie nun selbst das Bildungsgesetz. Tip: Die Koeffizienten in den Klammern könnten Binomialkoeffizienten sein.

Aufgabe 12

Eine Bank bietet ihren Sparkunden bei einer Einlage von 100 Euro über x Jahre folgende drei Anlagevarianten an:

I. Die klassische Zinseszins-Version mit einem jährlichen Zinssatz p
II. Keine direkte Verzinsung, aber jährlich gibt es 50 Euro dazu
III. Im ersten Jahr 5 Euro, im zweiten 10 usw.

a) Geben Sie allgemein den Endwert jeder Variante nach x Jahren an.

I: $S_{xI}=100\cdot(1+p)^x$

II: $S_{xII}=100+50\cdot x$

III: $S_{xIII}=100+(1+2+3+...+x)\cdot 5=100+\frac{x\cdot(x+1)}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}\cdot(x^2+x+40)$

b) Welche Variante ist die günstigste nach x=10 Jahren (p=2.5% für Variante I)

Variante II

c) Welche nach x=40 Jahren?

Variante III

d) Welche nach x= 60 Jahren?

*Variante I → **Langfristig** ist Zinszins-Verzinsung allen anderen üblichen Verfahren überlegen.*

Aufgabe 13

Gegeben sind die Mengen

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

$C=\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

Bestimmen Sie

a) $A\cup B$ → {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

b) $A\cup C$ → {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13}

c) $A\cap B$ → {2,3,4,5,6}

d) $A\setminus B$ → {1,7,8,9,10}

e) bis k) selbst lösen

e) $A\setminus C$

f) $A\cup(B\cup C)$

g) $(A\cup B)\cup C$

h) $A\cup(B\cap C)$

i) $A\cap(B\cup C)$

j) $A\cap(A\cup C)$ (vergleichen mit A)

k) $(A\setminus C)\cap C$

Aufgabe 14

Gegeben sind die Mengen

$R=\{d, e, f\}$ und $Q=\{m, n\}$.

Geben Sie

a) die Potenzmengen P(R) und P(Q) → *P(R)={Ø, d, e, f, {d,e}, {d,f}, {e,f}, {d,e,f}}*

P(Q) selbst lösen

b) – e) selbst lösen

b) $R \times R = R^2$

c) $R \times Q$

d) $Q \times R$

e) $Q \times R \times Q$

an.

Selbst lösen

Aufgabe 15

Zeigen Sie, dass für die Mengen

$S=\{d, e, f\}$, $T=\{d, f, g\}$ und $U=\{f, g, h\}$ die beiden Distributivgesetze

a) $S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U)$

b) $S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U)$

gelten.

Selbst lösen (Klammern-Vorrang beachten!)

Aufgabe 16

Gegeben ist die Dezimalzahl 753_{10} . Stellen Sie diese

a) im Zweiersystem → 1011110001_2

b) im Dreiersystem → 1000220_3

c) als Oktalzahl → $001\ 011\ 110\ 001_2 = 1351_8$

d) Im 16-er System → $2F1_{16}$

dar.

Aufgabe 17

Stellen Sie die Hexadezimalzahl 1672_{16} als Dezimal-, Oktal- und Binärzahl dar.

5746_{10} , $1\ 011\ 001\ 110\ 010_2 = 1\ 3\ 1\ 5\ 2_8$

Aufgabe 18

Gegeben sind die beiden Dezimalzahlen $x = 77_{10}$ und $y = 49_{10}$. Bilden Sie im Zweiersystem unter Verwendung des Zweierkomplementverfahrens die Differenzen

a) y-x

b) x-y

Selbst lösen, orientieren Sie sich an ueb_03 mit LV, Aufgabe 1a) -1e).

Aufgabe 19

Bestimmen Sie das Produkt der beiden Zahlen $x = 59_{10}$ und $y = 37_{10}$ im Dualsystem. Der Ablauf muss klar ersichtlich sein.

Selbst lösen