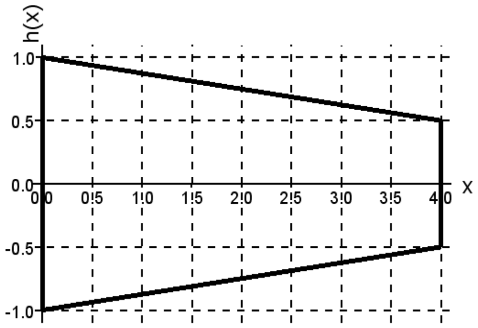
Mathematik II - Übungsblatt 01

Aufgabe 1

Das Rotorblatt eines Windrades soll ein möglichst geringes Trägheitsmoment θ („Theta") haben, um die dynamischen Kräfte beim Drehen gering zu halten. Die Trapezform ist dafür geeigneter als eine Rechteckform (x = Länge, h=h(x) = variable Höhe, d = Dicke, ρ = spezifische Masse):



$$\theta=\int_0^4 x^2\cdot\rho\cdot 2\cdot h(x)\cdot d\cdot dx=2\cdot\rho\cdot d\int_0^4 x^2\cdot h(x)dx$$

Das Trägheitsmoment bezieht sich hier auf die Drehung des Rotorblattes um die vertikale Achse. Wegen der Symmetrie genügt die Betrachtung der oberen Hälfte.

a) Geben Sie die Funktion $h=h(x)$ an. (**Probe machen**, ob h(0) =1 und h(4) = 0.5 ist !)
b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment θ .

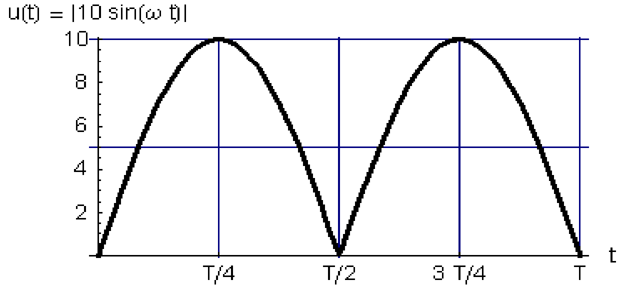
Aufgabe 2

Sinusförmige Spannungen mit der Periodendauer T können durch Angabe einer Amplitude $\hat{u}$ und der Kreisfrequenz $\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}$ mithilfe der Funktion $u(t)=\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t)=\hat{u}\cdot\sin(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t)$

beschrieben werden. Um aus der sinusförmigen Spannung annähernd eine Gleichspannung zu erzeugen, kann man sie einem Zweiweggleichrichter zuführen. Er „klappt" den negativen Sinusbogen nach oben, wirkt also wie die Betragsfunktion

$$u(t)=|\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t)| \quad .$$

Das Diagramm für $\hat{u}=10\,\text{Volt}$ sieht dann so aus:



Der sich am Gleichrichter-Ausgang einstellende arithmetische Mittelwert der Spannung ist (Definition)

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t)\,dt \quad .$$

a) Zerlegen Sie den Bereich des bestimmten Integrals unter Beachtung der Symmetrien in zwei geeignete Zeitabschnitte.

b) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert (= hier Gleichricht-Mittelwert) $\bar{u}$.

c) Bestimmen Sie den Effektivwert $U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t)^2\,dt}$

Aufgabe 3

a) $\int x^2 \cdot e^{3x}\,dx$

b) $\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx$

c) $\int e^x \cdot \sin(x)\,dx$

d) $\int_0^1 (-6x^2+4) \cdot e^x\,dx$

e) $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,dx$

f) $\int x \cdot \sin(\frac{x}{2})\,dx$

Aufgabe 4

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

b) $\int (\cos(x))^2\,dx$

c) Stammfunktion zu $f(u) = \frac{5}{3+3 \cdot u^2} - \frac{1}{4} \cdot u^4$

d) Bestimmen Sie $a,\ b \in R$ mit $a \le b$ so, dass $\int_a^b (x - x^2)\,dx$ maximal wird.

Aufgabe 5

Aufgrund der Gesetze der Mechanik gilt mit dem Weg x=x(t) eines Körpers:

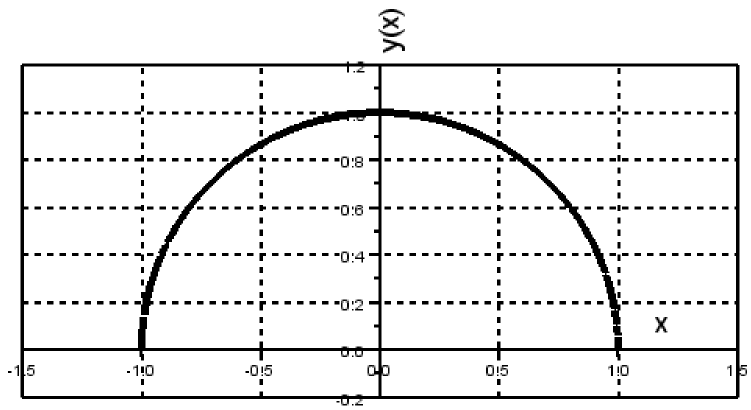
- Geschwindigkeit $v(t) = \frac{dx}{dt}$

- Beschleunigung $b(t) = \dfrac{dv}{dt}$.

Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von 5 $\left[\dfrac{m}{s}\right]$ senkrecht nach oben geworfen. Bestimmen Sie unter Verwendung der Erdbeschleunigungs-Konstanten g=9.81 $\left[\dfrac{m}{s^2}\right]$ die Bahnhöhe x(t) sowie die maximale Steighöhe und den zugehörigen Zeitpunkt.

Aufgabe 6

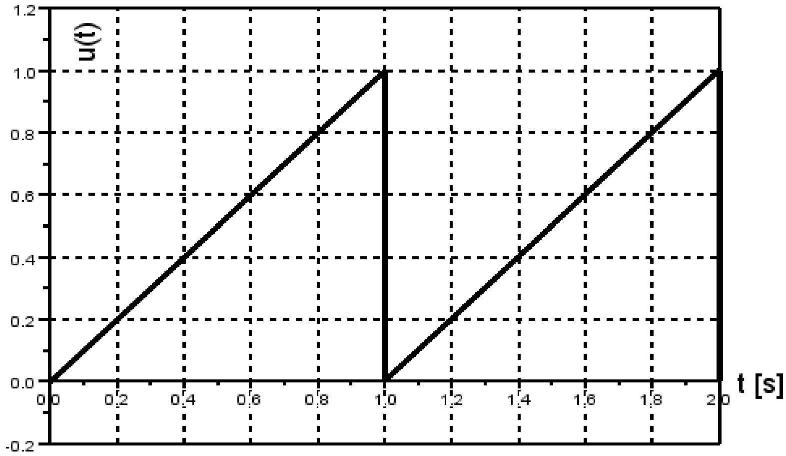
Bestimmen Sie den Schwerpunkt ys einer Halbkreisfläche, Kreisradius r=1. Der Schwerpunkt muss aus Symmetriegründen auf der y-Achse liegen.



Definition des Schwerpunktes: $ys = \dfrac{\int_{-r}^{+r} \frac{y}{2} \cdot y\,dx}{\int_{-r}^{+r} y\,dx}$ Hinweis: Welche Funktion y=y(x) beschreibt einen Kreis?

Aufgabe 7

Effektivwert von



a) Sägezahnspannung u=u(t), Periodendauer T=1s → u(t)=u(t-T): (3)

b) Sägezahnspannung mit e-Funktions-Profil, Periodendauer T=2s → u(t) = u(t-T): (4)

Für $0 \leq t \leq 1\text{s} \quad \rightarrow \quad u(t) = \dfrac{e(t)-1}{e-1}$

Für $1 \leq t \leq 2\text{s} \quad \rightarrow \quad u(t) = \dfrac{e(2-t)-1}{e-1}$