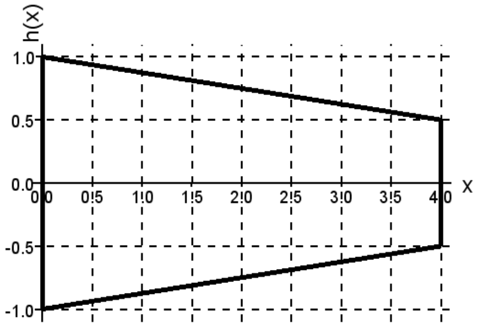
Mathematik II - Übungsblatt 01
mit Lösungsvorschlägen

Aufgabe 1

Das Rotorblatt eines Windrades soll ein möglichst geringes Trägheitsmoment θ („Theta") haben, um die dynamischen Kräfte beim Drehen gering zu halten. Die Trapezform ist dafür geeigneter als eine Rechteckform (x = Länge, h=h(x) = variable Höhe, d = Dicke, ρ = spezifische Masse):



$$\theta=\int_0^4 x^2\cdot\rho\cdot 2\cdot h(x)\cdot d\cdot dx=2\cdot\rho\cdot d\int_0^4 x^2\cdot h(x)dx$$

Das Trägheitsmoment bezieht sich hier auf die Drehung des Rotorblattes um die vertikale Achse. Wegen der Symmetrie genügt die Betrachtung der oberen Hälfte.

a) Geben Sie die Funktion $h=h(x)$ an. (**Probe machen**, ob h(0) =1 und h(4) = 0.5 ist !)

$$h(x)=-0.125\cdot x+1$$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment θ .

$$\theta=2\cdot\rho\cdot d\int_0^4 x^2\cdot h(x)dx=2\cdot\rho\cdot d\int_0^4 x^2\cdot\left(-\frac{1}{8}\cdot x+1\right)dx=2\cdot\rho\cdot d\int_0^4\left(-\frac{1}{8}\cdot x^3+x^2\right)dx$$

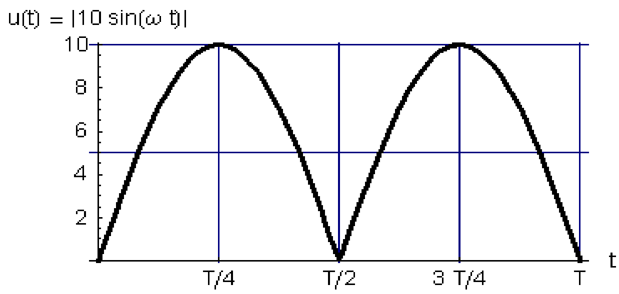
$$=2\cdot\rho\cdot d\left[-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{80}{3}\cdot\rho\cdot d$$

Aufgabe 2

Sinusförmige Spannungen mit der Periodendauer T können durch Angabe einer Amplitude $\hat{u}$ und der Kreisfrequenz $\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}$ mithilfe der Funktion $u(t)=\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t)=\hat{u}\cdot\sin(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t)$ beschrieben werden. Um aus der sinusförmigen Spannung annähernd eine Gleichspannung zu erzeugen, kann man sie einem Zweiweggleichrichter zuführen. Er „klappt" den negativen Sinusbogen nach oben, wirkt also wie die Betragsfunktion

$$u(t)=|\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t)| \quad .$$

Das Diagramm für $\hat{u}=10\,\text{Volt}$ sieht dann so aus:



Der sich am Gleichrichter-Ausgang einstellende arithmetische Mittelwert der Spannung ist (Definition)

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t)\,dt \quad .$$

a) Zerlegen Sie den Bereich des bestimmten Integrals unter Beachtung der Symmetrien in zwei geeignete Zeitabschnitte.

Es bietet sich die Zerlegung in 2 Abschnitte an (die Zerlegung in 4 Abschnitte wäre auch möglich):

$$\bar{u} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} u(t)\,dt = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)\,dt = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)\,dt = \hat{u} \cdot \frac{2}{T} \left[-\frac{1}{\omega} \cdot \cos(\omega \cdot t) \right]_0^{\frac{T}{2}}$$

b) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert (= hier Gleichricht-Mittelwert) $\bar{u}$.

$$\bar{u} = \frac{\hat{u} \cdot 2}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \left[\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - \cos(0) \right] = \hat{u} \cdot \frac{2}{\pi}$$

c) Bestimmen Sie den Effektivwert $U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t)^2\,dt}$

Man löst das Integral unter der Wurzel: $U_{eff} = \; = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot I_1}$

$$I_1 = \int_0^T u(t)^2\,dt = 2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \hat{u}^2 \cdot (\cos(\omega \cdot t))^2\,dt = 2 \cdot \hat{u}^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} (\cos(\omega \cdot t))^2\,dt$$

Mit der trigonometrischen Umformung

$$\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = (\cos(x))^2 + (\cos(x))^2 - 1 = 2 \cdot (\cos(x))^2 - 1$$

$(\cos(x))^2 = \frac{1}{2} \cdot [\cos(2x) + 1]$ erhält man

$I_1 = 2 \cdot \hat{u}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \omega} \sin(\omega \cdot t) + \frac{t}{2} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{\hat{u}^2 \cdot T}{4}$ und nach Einsetzen $U_{eff} = \frac{\hat{u}}{2}$

Aufgabe 3

a) $\int x^2 \cdot e^{3x}\, dx$

Partielle Integration: $u = x^2 \;\rightarrow\; u' = 2x \;,\; v' = e^{3x} \;\rightarrow\; v = \frac{1}{3}\cdot e^{3x}$

$$\int x^2 \cdot e^{3x}\, dx = x^2 \cdot \frac{1}{3}\cdot e^{3x} - \frac{2}{3}\cdot \int x\cdot e^{3x}\, dx$$

Das rechte Integral wird wiederum mithilfe der partiellen Integration gelöst, nun ist

$u = x \;\rightarrow\; u' = 1$, v wie vorher:

$$\int x^2 \cdot e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}\cdot x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}\cdot \left[\frac{1}{3}\cdot x\cdot e^{3x} - \frac{1}{3}\cdot \int e^{3x}\, dx\right] = e^{3x}\cdot\left[\frac{9\cdot x^2 - 6\cdot x + 2}{27}\right]$$

b) $\int x^2 \cdot \ln(x)\, dx$

Man kann die partielle Integration verwenden, wenn man zuvor geklärt hat, welche Funktion v(x) $v' = \ln(x)$ ergibt. Hierfür ist die partielle Integration

$\int 1\cdot \ln(x)\, dx$ geeignet. Mit $s = \ln(x) \;\rightarrow\; s' = \frac{1}{x} \;,\; t' = 1 \;\rightarrow\; t = x$

wird $v = x\cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x}\cdot x\, dx = x\cdot \ln(x) - x = x\cdot(\ln(x) - 1)$.

$u = x^2 \;\rightarrow\; u' = 2x$

$$\int x^2 \cdot \ln(x)\, dx = x^2 \cdot x\cdot(\ln(x) - 1) - 2\cdot \int x\cdot \ln(x)\, dx$$

Das rechte Integral wird wiederum mit partieller Integration gelöst. Schließlich erhält man

$$\int x^2 \cdot \ln(x)\, dx = x^3 \cdot \left(\frac{\ln(x)}{3} - \frac{1}{9}\right)$$

c) $\int e^x \cdot \sin(x)\, dx \;\rightarrow$ p. Integration: $u = e^x \;\rightarrow\; u' = e^x \;,\; v' = \sin(x) \;\rightarrow\; v = -\cos(x)$

$$\int e^x \cdot \sin(x)\, dx = -e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot(-\cos(x))\, dx$$

Das rechte Integral wird nochmals mit part. Int. gelöst und man erhält u. a. erneut das linke Integral. Auflösen ergibt

$$\int e^x \cdot \sin(x)\, dx = \frac{e^x}{2}\cdot[-\cos(x) + \sin(x)]$$

d) $\int_0^1 (-6x^2 + 4)\cdot e^x\, dx \;\rightarrow\; \int_0^1 (-6x^2 + 4)\cdot e^x\, dx = \left[-2\cdot e^x \left(3\cdot x^2 - 6\cdot x + 4\right)\right]_0^1 = 8 - 2\cdot e$

e) $\int \sin(x)\cdot \cos(x)\, dx \;\rightarrow$ Integranden mit $\sin(x)\cdot\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ umformen.

$$\int \sin(x)\cdot \cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\cdot \int \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{4}\cdot \cos(2x) = -\frac{1}{4}\cdot\left[\left(\cos(x^2) - \sin(x^2)\right)\right] = -\frac{1}{4}\left[1 - 2\cdot(\sin(x))^2\right] + \text{const}$$

$$\int \sin(x)\cdot \cos(x)\, dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\left[\sin(x)^2\right] + \text{const.}$$

Da der Beitrag $-\frac{1}{4}$ konstant ist, kann er formal in „const.“ hineingezogen werden. Das Ergebnis ist daher gleichwertig zu $\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\sin(x)^2\right] + \text{const.}$. So wird es auch in Formelsammlungen angegeben. (Probe machen!)

f) $\int x\cdot\sin(\frac{x}{2})dx \;\rightarrow\; u=x \;\rightarrow\; u'=1 \;,\; v'=\sin(\frac{x}{2}) \;\rightarrow\; v=-2\cdot\cos(\frac{x}{2})$

Lösung: $\int x\cdot\sin(\frac{x}{2})dx = 4\cdot\sin(\frac{x}{2}) - 2\cdot x\cos(x) + \text{const.}$

Aufgabe 4

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\rightarrow$ mit $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}}$ selbst lösen.

b) $\int (\cos(x))^2 dx$ $\rightarrow$ siehe Lösung zu 2c.

c) Stammfunktion zu $f(u) = \frac{5}{3+3\cdot u^2} - \frac{1}{4}\cdot u^4$ $\rightarrow$ selbst lösen.

d) Bestimmen Sie $a, b \in R$ mit $a \leq b$ so, dass $\int_a^b (x-x^2)dx$ maximal wird.

Schauen Sie sich den Graphen zum Integranden an. Er ist eine nach unten gestülpte Parabel mit den Nullstellen bei x=0 und x =1. Die Fläche ($\rightarrow$ das bestimmte Integral) unter $x-x^2$ ist maximal positiv, wenn a = 0 und b =1 gewählt wird, da der linke und der rechte Ast nur negative Flächen liefert.

Aufgabe 5

Aufgrund der Gesetze der Mechanik gilt mit dem Weg x=x(t) eines Körpers:

- Geschwindigkeit $v(t) = \frac{dx}{dt}$
- Beschleunigung $b(t) = \frac{dv}{dt}$.

Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von 5 $\left[\frac{m}{s}\right]$ senkrecht nach oben geworfen. Bestimmen Sie unter Verwendung der Erdbeschleunigungs-Konstanten g=9.81 $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ die Bahnhöhe x(t) sowie die maximale Steighöhe und den zugehörigen Zeitpunkt.

$$v(t) = \int_0^t b(\tau)\,d\tau \quad .$$

Hier ist $b(\tau) = -g = \text{const}$, die Erdbeschleunigung wirkt entgegengesetzt zur Steigrichtung, daher

$$v(t) = -g\cdot t + v(0) \quad \text{mit} \quad v(0) = 5\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$x(t)=\int_0^t v(\tau)\,d\tau=\int_0^t (-g\cdot\tau+v(0))\,d\tau=-g\cdot\frac{t^2}{2}+v(0)\cdot t \quad .$$

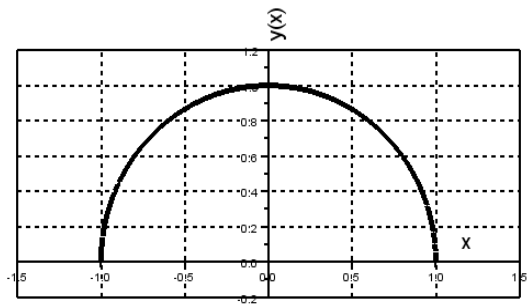
Die maximale Steighöhe $x_{max}(t_{max})$ ist erreicht, wenn $v(t_{max})=0$ wurde:

$$v(t_{max})=-g\cdot t_{max}+v(0)=0 \quad \rightarrow \quad t_{max}=\frac{5}{g}$$

Damit wird $x_{max}=-g\cdot\frac{t_{max}^2}{2}+5\cdot t_{max}$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie den Schwerpunkt ys einer Halbkreisfläche, Kreisradius r=1. Der Schwerpunkt muss aus Symmetriegründen auf der y-Achse liegen.

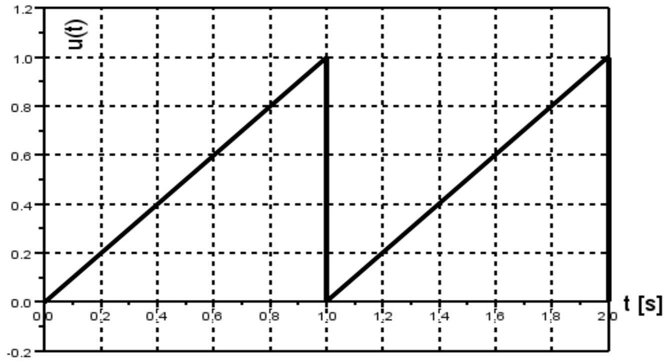


Definition des Schwerpunktes: $ys=\frac{\int_{-r}^{+r}\frac{y}{2}\cdot y\,dx}{\int_{-r}^{+r} y\,dx}$ Hinweis: Welche Funktion y=y(x) beschreibt einen Kreis?

Der Kreis mit dem Radius r =1 wird durch die Funktion $y=\sqrt{(1-x^2)}$ beschrieben. Selber lösen mithilfe einer Integral-Tabelle.

Lösung: $y_s=\frac{4}{3\cdot\pi}$, bei r = 1.

Aufgabe 7



a) Effektivwert der Sägezahnspannung u=u(t), Periodendauer T=1s → u(t)=u(t-T) .

Periodendauer $T=1s$, Maximalwert der Spannung $u(t=1s)=1$.
Die Spannungsfunktion u(t) wird ausnahmsweise als **dimensionslos** betrachtet.

$$\rightarrow \quad u(t)=\frac{t}{1s}$$

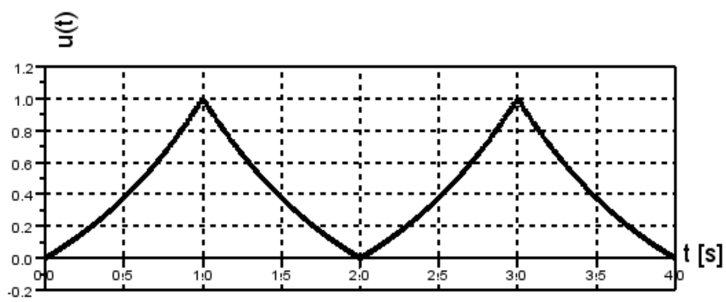
$$\rightarrow \quad {U_{eff}}^2=\frac{1}{1s}\cdot\int_0^{1s} u(t)^2 dt=\frac{1}{1s}\cdot\left[\frac{1}{3\cdot(1s)^2}\cdot t^3\right]_0^{1s}=1/3 \quad \rightarrow \quad U_{eff}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad .$$

b) Sägezahnspannung mit e-Funktions-Profil, Periodendauer T=2s → u(t) = u(t-T).

Für $0 \le t \le 1s \quad \rightarrow \quad u(t)=\frac{e(t)-1}{e-1}$

(exakt $u(t)=\frac{e^{\left(\frac{t}{1s}\right)}-1}{e-1}$, da der Exponent dimensionslos sein muss.)

Für $1 \le t \le 2s \quad \rightarrow \quad u(t)=\frac{e(2-t)-1}{e-1}$ (exakt $u(t)=\frac{e^{(\frac{2s-t}{1s}-1)}}{e-1}$)



Periodendauer $T = 2s$. Da u(t) symmetrisch zu t = 1s verläuft, genügt es den Effektivwert für $0s \le t \le 1s$ zu berechnen:

$$U_{eff}{}^2 = \frac{1}{2s} \cdot \int_0^{2s} u(t)^2 dt = \frac{1}{1s} \cdot \int_0^{1s} \left(\frac{e^{\frac{t}{1s}} - 1}{e-1} \right)^2 dt = \frac{1}{1s} \cdot \int_0^{1s} \frac{e^{\frac{2t}{1s}} - 2 \cdot e^{\frac{t}{1s}} + 1}{(e-1)^2} dt$$

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{1s} \cdot \frac{1}{(e-1)^2} \left[\frac{1s}{2} \cdot e^{\frac{2t}{1s}} - 2 \cdot 1s \cdot e^{\frac{t}{1s}} + t \right]_0^{1s}$$

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{(e-1)^2} \left[\frac{1}{2} \cdot e^2 - 2 \cdot e^1 + 1 - \frac{1}{2} + 2 \right] = \frac{1}{(e-1)^2} \left[\frac{1}{2} \cdot e^2 - 2 \cdot e + \frac{5}{2} \right]$$

Die Angabe von U_{eff}^2 reicht aus. Numerischer Wert (nicht verlangt): $U_{eff} = 0.51$

Hinweis: Man kann hier t ausnahmsweise als dimensionslose Variable betrachten, dann wird die Integration über den Bereich $0 \le t \le 1$ ausgeführt:

$$U_{eff}{}^2 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 u(t)^2 dt = \int_0^1 \left(\frac{e^t - 1}{e-1} \right)^2 dt$$. Das Ergebnis ist identisch zum obigen.