Mathematik II - Übungsblatt 02
mit Lösungsvorschlägen

Aufgabe 1

a) $\int_0^2 4\cdot x^3\cdot e^{x^4}dx$

Erst das unbestimmte Integral lösen: Substitution $t=x^4 \rightarrow t'=\frac{dt}{dx}=4\cdot x^3 \rightarrow dt=4\cdot x^3 dx \rightarrow$

$\int e^t dt=e^t \rightarrow$ Rücksubstitution und Grenzen einsetzen: $\int_0^2 4\cdot x^3\cdot e^{x^4}dx=\left[e^{x^4}\right]_0^2=e^{16}-1$

Alternativ: Bestimmtes Integral beibehalten, dann jedoch obere und untere Grenze ebenfalls substituieren: $t_o=2^4=16$, $t_u=0^4=0$

b) $\int x\cdot\ln(x^2)dx$

Substitution $t=x^2 \rightarrow t'=\frac{dt}{dx}=2\cdot x \rightarrow dt=2\cdot x\,dx \rightarrow \int x\cdot\ln(x^2)dx=\frac{1}{2}\int\ln(t)dt$. Diese Integral mit partieller Integration lösen, dazu den Integranden als

$\int 1\cdot\ln(t)dt$ schreiben, $u=\ln(t) \rightarrow u'=\frac{1}{t}$, $v'=1 \rightarrow v=t$

$$\int 1\cdot\ln(t)dt=t\cdot\ln(t)-\int t\cdot\frac{1}{t}dt=t\cdot\ln(t)-t=2\cdot x\cdot\left(\ln(x^2)-1\right)+x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2\cdot x=2\cdot x\cdot\ln(x^2)\quad .$$

c) $\int x\cdot e^{k\cdot x}dx \rightarrow$ Partielle Integration: $u=x \rightarrow u'=1$, $v'=e^{k\cdot x} \rightarrow v=\frac{1}{k}\cdot e^{k\cdot x}$

Selbst weiter lösen.

Aufgabe 2

Geben Sie die Stammfunktionen F(x) an:

a) $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}}$

$$f(x)=x^{\frac{1}{4}} \rightarrow F(x)=\frac{4}{5}\cdot x^{\frac{5}{4}}\quad .$$

b) $f(x)=(1+x)^2\cdot\cos(x)$.

$$f(x)=\cos(x)+x^2\cdot\cos(x) \rightarrow F(x)=\sin(x)+2\cdot x\cos(x)+(x^2-2)\cdot\sin(x)$$

(Für zweiten Term in f(x) partielle Integration anwenden).

Aufgabe 3

a) $$\int\frac{x^3}{(x+1)\cdot(x^2-4x+3)}dx=\int\frac{x^3}{x^3-3x^2-x+3}dx$$

Im Integranden ist Zählergrad =Nennergrad. Daher zunächst den ganz-rationalen Teil durch Polynomdivisiom abspalten:

$$\frac{x^3}{x^3-3x^2-x+3}=1+\frac{3x^2+x-3}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-3)} \quad .$$

Der zweite Term kann mithilfe der Partialbruchzerlegung in

$$\frac{3x^2+x-3}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-3}=\frac{A\cdot(x-1)\cdot(x-3)+B\cdot(x+1)\cdot(x-3)+C\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-3)}$$

umgeformt werden. Die Bestimmung der Konstanten A, B, C erfolgt am einfachsten über das Einsetzverfahren → Polstellen in die Zählerpolynome links und rechts einsetzen:

x=-1: $-1=A\cdot(-2)\cdot(-4)\rightarrow A=-\frac{1}{8}$

x=+1: $1=B\cdot 2\cdot(-2)\rightarrow B=-\frac{1}{4}$

x=+3: $27=C\cdot 4\cdot 2\rightarrow C=\frac{27}{8}$

Damit wird

$$\int\frac{x^3}{(x+1)\cdot(x^2-4x+3)}dx=\int\frac{x^3}{x^3-3x^2-x+3}dx=x-\ln(x+1)-\frac{1}{4}\cdot\ln(x-1)+\frac{27}{8}\ln(x-3)+const \quad .$$

Alternative (wegen des höheren Aufwandes hier aber nicht zu empfehlen !):

Koeffizientenvergleich der Zählerpolynome links und rechts → dies ergibt ein System von 3 linearen Gleichungen für A, B und C.

zu x^2: $3=A+B+C$ usw.

b) $\int\frac{1}{(x+1)^3}dx \rightarrow \int(x+1)^{-3}dx=-\frac{1}{4}\cdot(x+1)^{-4}+const$

Alternativ (aber wegen des höheren Aufwandes hier nicht zu empfehlen!): Partialbruchzerlegung für den gebrochen rationalen Polynomausdruck mit dreifacher Polstelle bei x=-1:

$$\int\frac{1}{(x+1)^3}dx=\int\left(\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}\right)dx \quad \text{usw.}$$

c) $\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx \rightarrow \int\frac{x}{x^2+x+1}dx+2\cdot\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$

Aus Formelsammlung:

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int\frac{x}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$$ (Zweiter Term → siehe Zeile vorher)

d) $\int \frac{1}{(x+1)^2\cdot(x^2-4)}dx$ → eine doppelte reelle und zwei einfache reelle Nullstellen:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2\cdot(x^2-4)}dx=\int \frac{A}{(x+1)}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-2}dx$$ → Selber lösen.

e) $\int \frac{4}{x^3+4x}dx$

Polstellen: $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}\cdot i$ → Wegen konjugiert komplexer Polstelle ist folgender Ansatz geeignet:

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{B\cdot x+C}{x^2+4}=\frac{A\cdot(x^2+4)+B\cdot x^2+C\cdot x}{x^3+4\cdot x}=\frac{(A+B)\cdot x^2+C\cdot x+4\cdot A}{x^3+4\cdot x}$$

Koeffizientenvergleich der Zählerterme:

$A=1$, $C=0$, $A+B=0 \rightarrow B=-1$

$$\int \frac{4}{x^3+4x}dx=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}\right]dx=\ln(x)-\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+4)+C$$

f) $\int \frac{1}{x^5+4x^4+7x^3+7x^2+4x+1}dx$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind $x_1=x_2=x_3=-1$, $x_{4,5}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot j$.

Der Integrand lässt sich damit auch als

$\frac{1}{(x^2+x+1)\cdot(x+1)^3}$ schreiben.

Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{1}{(x^2+x+1)\cdot(x+1)^3}=\frac{A+Bx}{x^2+x+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3}=$$

$$=\frac{(A+Bx)\cdot(x+1)^3+C\cdot(x^2+x+1)\cdot(x+1)^2+D\cdot(x^2+x+1)\cdot(x+1)+E\cdot(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)\cdot(x+1)^3}$$

Die 5 Konstanten können über verschiedene Verfahren bestimmt werden. Eines ist der Vergleich der Koeffizienten bei gleichen Potenzen von x links und rechts. Dies erfordert das weitere Umformen des Zählers, was hier aufwändig wird. Ein anderer Weg besteht aus dem Einsetzen günstiger Werte für x, womit man in diesem Fall einfacher zum Ziel kommt *) :

- Einsetzen von $x=-1$ im Zähler ergibt zunächst $E=1$ (alle anderen Beiträge fallen wegen der Nullstelle dabei weg).
- $x=0 \rightarrow A+C+D+1=1$
- $x=1 \rightarrow (A+B)\cdot 8+C\cdot 12+D\cdot 6+3=1 \rightarrow 8A+8B+12C+6D=-2$
- $x=2 \rightarrow (A+2B)\cdot 27+C\cdot 7+D\cdot 21+7=1 \rightarrow 27A+54B+7C+21D=-6$
- $x=-2 \rightarrow (A-2\cdot B)\cdot(-1)+C\cdot 3+D\cdot(-3)+3=1 \rightarrow -A+2B+3C-3D=-2$

Nun muss das LGS gelöst werden:

$A=\frac{95}{16,}$ $B=-\frac{3}{2}$, $C=-\frac{21}{16}$, $D=-\frac{29}{8}$ (z. B. mit Hilfe von SCILAB oder MATLAB).

*) **Hinweis:** In einer Klausur ist die Lösung des LGS zu aufwändig. Die Angabe des Verfahrens würde ausreichen und man rechnet mit den symbolischen Variablen weiter.

Damit wird das unbestimmte Integral (für den ersten Partialbruch würde die Lösung angegeben sein):

$$\int \frac{A+Bx}{x^2+x+1}dx = A\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+B\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$\int \frac{C}{x+1}dx = C\cdot\ln(x)$$

$$\int \frac{D}{(x+1)^2}dx = D\cdot\frac{-1}{x+1}$$

$$\int \frac{E}{(x+1)^3}dx = E\cdot(-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 4

Die Laplace-Transformierte L(x(t)) der Zeitfunktion x(t) mit $x(t<0)=0$ ist das uneigentliche Integral

$$L(x(t)) \; = \; X(s)=\int_0^\infty x(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt$$

Bestimmen Sie X(s) für

a) $x(t\geq 0) \; = e^{-\frac{t}{T_1}}, \; T_1\in R, \; T_1>0$

$$X(s)=\int_0^\infty e^{-\frac{1}{T_1}}\cdot e^{-s\cdot t}dt=\int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{T_1}+s\right)\cdot t}dt=\left[-\frac{1}{\frac{1}{T_1}+s}\cdot e^{-\left(\frac{1}{T_1}+s\right)\cdot t}\right]_0^\infty=0-\left(-\frac{1}{\frac{1}{T_1}+s}\right)=\frac{1}{\frac{1}{T_1}+s}$$

b) $x(t\geq 0) \; =\sin(\omega\cdot t), \; \omega=2\cdot\pi\cdot f$

$$X(s)=\int_0^\infty \sin(\omega\cdot t)\cdot e^{-s\cdot t}dt$$

Die Sinusfunktion kann nach den Regeln der komplexen Rechnung als

$\sin(\omega\cdot t)=\dfrac{e^{j\cdot\omega\cdot t}-e^{-j\cdot\omega\cdot t}}{2\cdot j}$ dargestellt werden. → Selber lösen.

Ergebnis: $X(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

c) $x(t\geq 0) \; =e^{-a\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t), \; \omega=2\cdot\pi\cdot f$

$X(s)=\int_0^\infty e^{-a\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot e^{-s\cdot t}dt$ → Selber lösen.

Ergebnis: $X(s)=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Aufgabe 5

Prüfen Sie nach, ob die folgenden Aussagen stimmen:

a) $\pi = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du \quad \rightarrow \quad \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sqrt{1-u^2} + \arcsin(u)\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

b) $\pi = 4 \cdot \int_0^1 \frac{1}{y^2+1}\,dy$ $\rightarrow$ Selber lösen.

Aufgabe 6 (selber lösen)

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

b) $\int_0^1 \frac{1}{1-v}\,dv$

c) $\int_0^3 \left[\frac{1}{(y-1)^{\frac{2}{3}}}\right] dy$