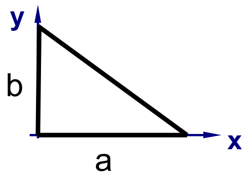
Mathematik II - Übungsblatt 03
mit Lösungsvorschlägen

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Doppelintegral (benötigt zur Berechnung von Verformung und Materialspannungen an Balken unter Lasteinwirkung)

$$I_{xy} = \int_{(A)} x \cdot y \, dA$$

zu einem mit den beiden Katheten im Achsenkreuz eines x-y-Koordinatensystems liegenden rechtwinkligen Dreiecks, Seitenlänge a auf der x-Achse und b auf der y-Achse.



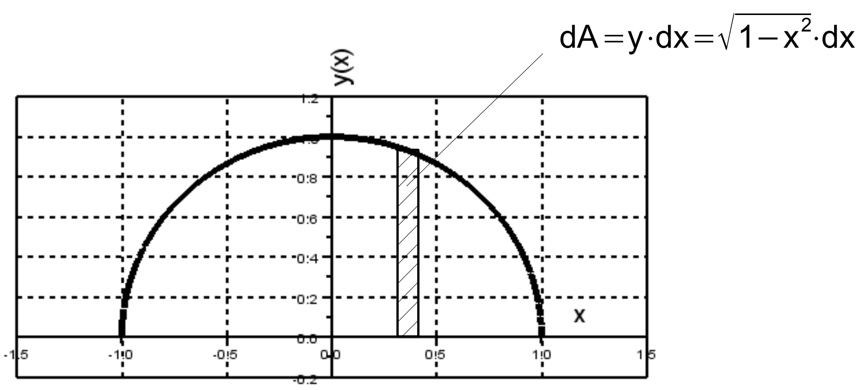
Siehe Beispiel im Skript, Kapitel 11.4.3, hier ist nur das Vorzeichen negativ.

Aufgabe 2 (Verwendung der Aufgabenstellung wie bei Aufgabe 1 genannt)

a) Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment

$$I_{yy} = \int_{(A)} x^2 dA$$

einer dünnen Halbkreisscheibe (z. B. aus Aluminium) mit dem Radius r bezüglich der y-Achse als Symmetrieachse (= Drehachse) .

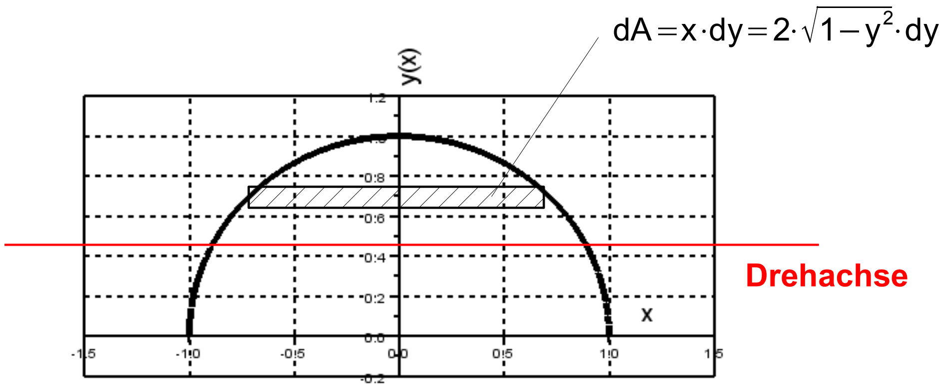


Das Doppelintegral über die Fläche A lässt sich als Einfachintegral über x schreiben:

$$I_{yy} = \int_{(A)} x^2 dA = \int_{x=-1}^{1} x^2 \cdot y \, dx = 2 \cdot \int_{x=0}^{1} x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = 2 \cdot \left[-\frac{x}{4} \cdot \sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{1}{8} \cdot \left(x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{8} \quad .$$

Die Lösung des Integrals schaut man in einer Formelsammlung nach (bitte unbedingt selbst durchführen und vergleichen, sonst fehlt im Ernstfall die Routine).

b) Bestimmen Sie gemäß der Vorgaben bei Punkt a) das Flächenträgheitsmoment $I_{xx}=\int\limits_{(A)} y^2 dA$ bezüglich der durch den Halbkreisschwerpunkt $y_S=\frac{4}{3\cdot\pi}\cdot r\approx 0.43$ parallel zur x-Achse laufende Drehachse.



Die Lösung erfolgt ähnlich zu der unter Punkt a). Hier ist noch zu beachten

- Der Ausdruck für die infinitesimale Fläche dA enthält den Faktor 2, da die Wurzel nur den rechten Beitrag von x erfasst (Probe → für y = 0 muss x = 2 sein)
- Die Integration läuft jetzt von $y_u=-\frac{4}{3\pi}$ bis $y_o=1-\frac{4}{3\pi}$.

. $I_{xx}=\int\limits_{(A)} y^2 dA=\int\limits_{yu}^{y_o} y^2\cdot x\, dy=\int\limits_{y_u}^{y_o} y^2\sqrt{1-y^2}\,dy=\left[-\frac{y}{4}\cdot\sqrt{(1-y^2)^3}+\frac{1}{8}\cdot\left(y\cdot\sqrt{1-y^2}+\arcsin(y)\right)\right]_{y_u}^{y_o}=\frac{9\cdot\pi^2-64}{72\cdot\pi}$

(Lösung wie unter Punkt a) mithilfe einer Formelsammlung).

c) Bestimmen Sie gemäß der Vorgaben bei Punkt a) das Flächendeviationsmoment $I_{yx}=-\int\limits_{(A)} x\cdot y\, dA$ (Doppelintegral). Selbst durchführen, Lösung zu Aufgabe 1 verwenden).

Aufgabe 3

Bestimmen Sie das Volumen einer Kugel mit dem Radius R.

Die Kugelsymmetrie erfordert nur die Berechnung einer Achtelkugel (Kugel halbieren und die Halbkugeln in je vier gleiche Stücke teilen). Die Integrationsgrenzen laufen dann für jede Variable von 0 bis R. Zwei Wege, hier R =1:

a) Als Dreifachintegral $V=\int\limits_{(V)} dV=\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\,dy\,dz$ mit der Kugelgleichung $x^2+y^2+z^2=1$

Selber lösen, Ergebnis: $V=\frac{8\cdot\pi}{6}=\frac{4}{3}\cdot\pi$, allgemein $V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R$

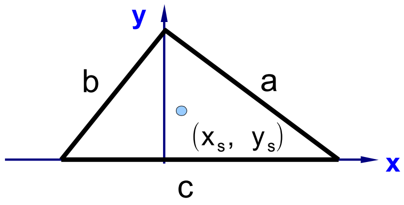
b) Als Einfachintegral durch Summation infinitesimaler Kreisscheiben dV über z mit

$$dV = A\,dz = x^2 \cdot \pi\,dz \quad , \quad x = \sqrt{(1-z^2)} \quad \text{(Kreisgleichung für R=1))}$$

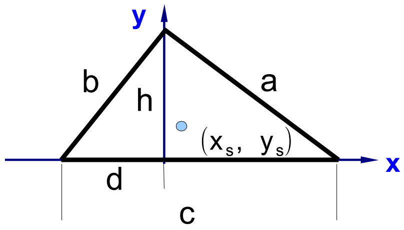
$$V = 2 \cdot \int_0^1 x^2 \cdot pi\,dz = 2 \cdot \int_0^1 (1-z^2)\,dz = \frac{4}{3} \cdot \pi$$

Aufgabe 4

Geben Sie den Schwerpunkt des in folgender Skizze dargestellten Dreiecks an:



Für den Schwerpunkt x_s gilt $x_s = \frac{\int_{(A)} x \cdot dA}{\int_{(A)} dA}$. Um die Integrale berechnen zu können, müssen die Funktionen für die linke und die rechte Dreiecks-Seite bekannt sein. Dazu führt man die Höhe h und den Abschnitt d ein:



Dann gilt $h^2 = b^2 - d^2 = a^2 - (c-d)^2 \quad \rightarrow \quad d = \frac{1}{2c} \cdot (c^2 - a^2 + b^2)$.

Die gesuchten Funktionen sind

$b(x) = \frac{h}{d} \cdot x + h$ (Probe: Für x = -d ist b=0, für x=0 ist b=h)

$a(x) = -\frac{h}{(c-d)} \cdot x + h$ (Probe machen!)

Man unterteilt die Integrale nun in die beiden Abschnitte $-d \leq x \leq 0$ und $0 \leq x \leq c-d$ und ersetzt das infinitesimale Flächenstück dA durch $dA = y \cdot dx$. Integral im Zähler

$$\int_{(A)} x \cdot dA = \int_{x=-d}^{0} x \cdot y\,dx + \int_0^{c-d} x \cdot y\,dx = \int_{-d}^{0} x \cdot b(x)\,dx + \int_0^{c-d} x \cdot a(x)\,dx \quad ,$$

Das Integral im Nenner ist einfach die Fläche der beiden rechtwinkligen Teildreiecke:

$\int_{(dA)} dA = \frac{d \cdot h + (c-d) \cdot h}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$ $\rightarrow$ Selber lösen, Ergebnis: $x_s = \frac{c - 2 \cdot d}{3}$, y_s $\rightarrow$ selber lösen.

Aufgabe 5

Lösen Sie das Dreifachintegral $I=\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{2x}\int\limits_{z=0}^{x+y} dx\,dy\,dz$.

Selber lösen, siehe Aufgabe 3. Ergebnis $I=\frac{4}{3}$

Aufgabe 6

Gegeben ist ein rechtwinkliges x-y-z-Koordinatensystem. Hierin liegt eine von den 3 Koordinatenebenen und der Ebene $x+y+z=1$ begrenzte Pyramide.

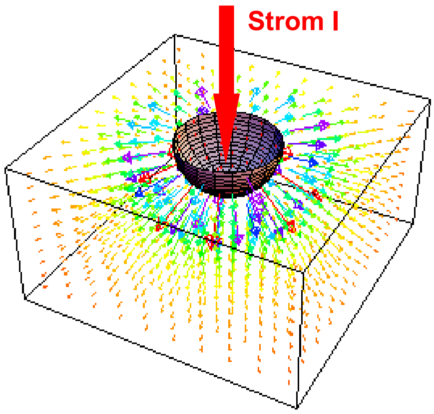
a) Fertigen Sie eine grobe Skizze an. → Selber machen, siehe Übung.

b) Bestimmen Sie das Volumen V (es ist ein Dreifachintegral).

Wie bei Aufgabe 3: Selber machen, Ergebnis: $V=\frac{1}{6}$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Erdungswiderstand eines Blitzableiters mit halbkugelförmiger Elektrode (Radius r_{HK}) der folgenden Anordnung:



Die Stromdichte S in jeder gedachten Halbkugelfläche mit dem Radius r im Erdreich ist

$$S=S(r)=\frac{I}{2\cdot\pi\cdot r^2} \quad ,$$

die elektrische Feldstärke E beträgt

$$E=E(r)=\frac{I}{\kappa\cdot 2\cdot\pi\cdot r^2}$$ mit κ als spezifischem Leitwert des Erdreichs.

Der Widerstand lässt sich über

$$R=\frac{U}{I} \quad \text{mit} \quad U=\int\limits_{r_{HK}}^{\infty} E\cdot ds$$

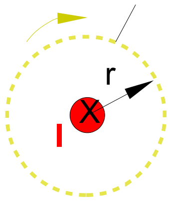
mit **ds** als Weg von der Halbkugelelektrode bis zum angenommenen Radius ∞ ermitteln.

$$ds=dr \qquad U=\int\limits_{r_{HK}}^{\infty}\frac{I}{\kappa\cdot 2\cdot\pi\cdot r^2}dr=\int\limits_{r_{HK}}^{\infty}\frac{I}{\kappa\cdot 2\cdot\pi\cdot r^2}dr=\frac{I}{2\cdot\pi\cdot\kappa}\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_{HK}}^{\infty}=\frac{I}{2\cdot\pi\cdot\kappa}\cdot\frac{1}{r_{HK}} \quad .$$

→ R selbst bestimmen.

Aufgabe 8

Der Betrag der magnetischen Feldstärke H (die Norm des Feldstärkevektors $\vec{H}$ um einen vom Strom I durchflossenen Leiter mit dem Radius r_{Leiter}



wird aus dem Linienintegral $\oint \vec{H}\,\vec{ds} = I \quad [A]$ bestimmt. Geben Sie die Feldstärke im Abstand r vom Leiter an (innen und außen).

Hinweise:

- Der Kreis am Integralzeichen bedeutet, dass ein vollständiger Umlauf für den Kreis mit dem Radius r gemacht wird (wie lang ist dann der Weg?).
- Der Feldstärke-Vektor $\vec{H}$ steht auf dem gedachten Radius r senkrecht und hat bei der hier angenommenen homogenen Umgebung (Luft) für einen konstanten Radius r einen konstanten Betrag.

  → Selbst rechnen, dabei beachten, dass außerhalb des Leiters ($r > r_{Leiter}$) der ganze Strom I umschlossen wird, innerhalb aber nur ein durch den Radius r gegebener Anteil $I_{innen} = \frac{r^2}{r^2_{Leiter}}$ (warum?).

Aufgabe 9

Der magnetische Fluss Φ ist als skalare Größe über das Flächenintegral

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \vec{dA} \quad [V\,s]$$

definiert. Hierin bedeutet $\vec{B}$ die magnetische Flussdichte (= magnetische Induktion), die mit der Feldstärke über die Materialgleichung

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad \left[\frac{VS}{m^2}\right]$$ mit μ als magnetischer Permeabilität

in Zusammenhang steht.

Bestimmen Sie für eine zur Feldstärke senkrecht stehende Rechteckfläche A mit den Seiten a und b den magnetischen Fluss in der Anordnung gemäß Aufgabe 8. Der axiale Abstand vom Leiter liegt dabei zwischen R und R+b, R ist größer als der Leiterradius.

→ Selbst rechnen.