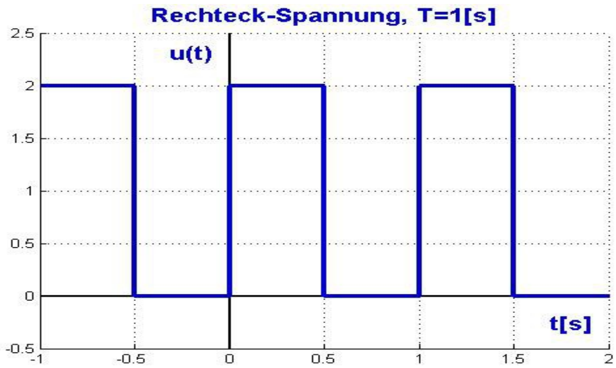
Mathematik II - Übungsblatt 04
mit Lösungsvorschlägen

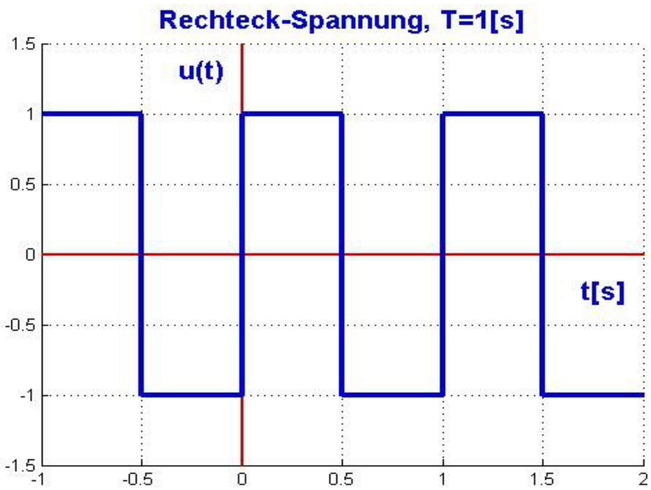
Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 der im folgenden Diagramm dargestellte Rechteckspannung:



Hinweis: Suchen Sie zunächst nach Vereinfachungen aufgrund eventuell vorhandener Symmetrien.

Symmetrien: Der Mittelwert ist $a_0 = 1$, Verschiebung um -1 ergibt die Funktion u'(t)=u(t) -1



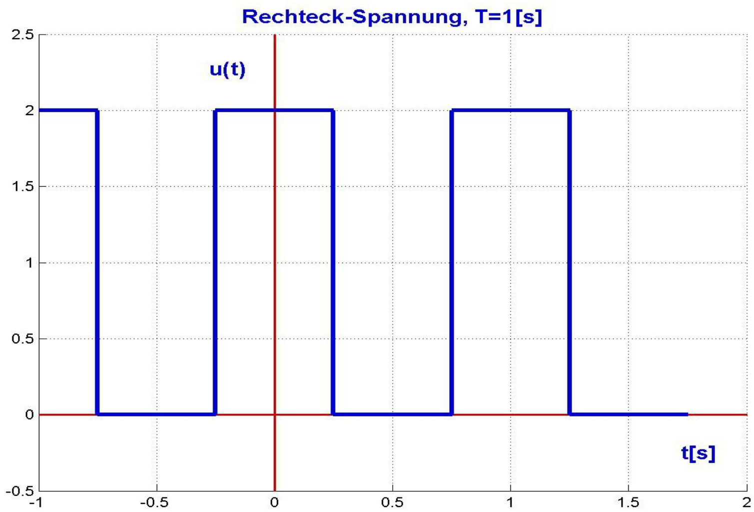
Der Mittelwert a_0 hat auf die Koeffizienten $a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots$ keinen Einfluss, für die weitere Auswertung kann die um den Mittelwert verschobene Funktion u'(t) verwendet werden. Diese ist wegen u'(t) = - u(-t) ungerade, daher verschwinden alle cos-Teilschwingungen in der Fourier-Reihe. Grund: Die cos-Funktion ist eine gerade Funktion und stört die Punktsymmetrie von u'(t).

Außerdem ist u(t) spiegelsymmetrisch, wenn man die vertikale Achse um T/4 verschiebt, siehe Diagramm weiter unten. Daher entfallen in den verbleibenden sin-Schwingungen alle geradzahligen Oberwellen, es bleiben nur die Anteile $b_1, b_3, b_5, \ldots$ übrig.

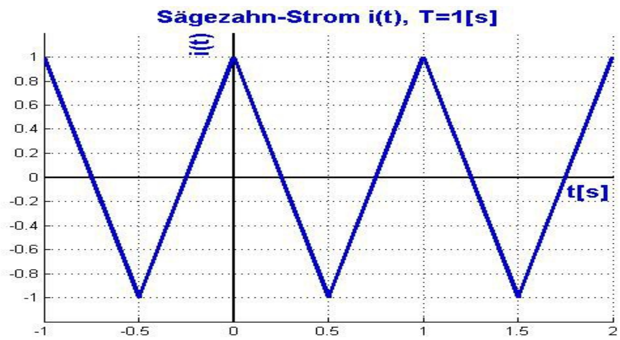
Ergebnisse:

$$b_1 = \frac{4}{\pi} \quad , \quad b_2 = 0 \quad , \quad b_3 = \frac{4}{3 \cdot \pi} \quad , \quad b_4 = 0 \quad , \quad b_5 = \frac{4}{5 \cdot \pi} \quad , \ldots.$$

$$u(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) + \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot 2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) + \ \ldots$$



Aufgabe 2



Geben Sie die Fourierkoeffizienten bis zur zweiten Oberschwingung des im Diagramm skizzierten Sägezahn-Stromes i(t) an.

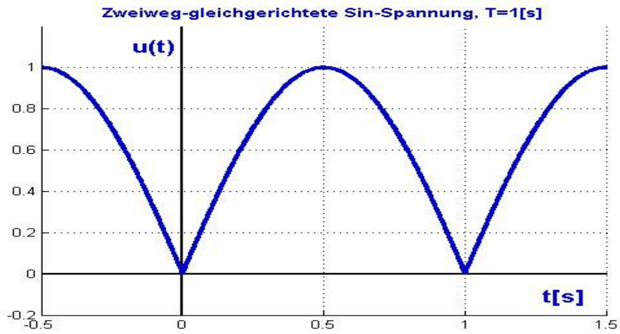
Symmetrien:

- i(t) ist symmetrisch zur t-Achse, daher $a_0 = 0$,
- symmetrisch zur i-Achse → gerade Funktion i(t) = i(-t), daher enthält die Fourierreihe keine sin-Anteile, alle $b_\nu = 0$
- Die um T/4 verschobene Funktion ist ungerade → i(t-T/4)= -i(-(t-T/4)), daher entfallen alle geraden cos-Oberwellen.

Ergebnisse: $a_1 = \frac{8}{\pi^2}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{8}{(3 \cdot \pi)^2}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{8}{(5 \cdot \pi)^2}$, ...

Aufgabe 3

Eine sinusförmige Eingangsspannung an einem Zweiweg-Gleichrichter ergibt folgende Ausgangsspannung u(t):



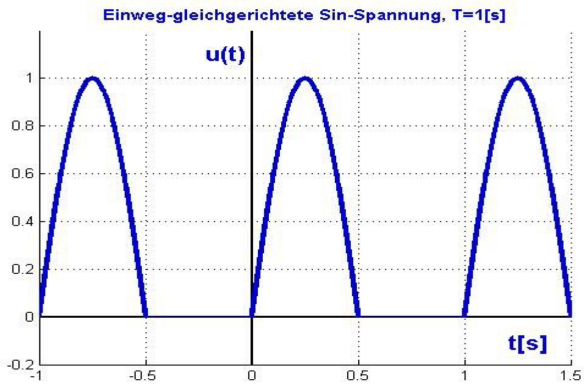
Bestimmen Sie die Amplituden (= Fourierkoeffizienten) a_1, b_1 der darin enthaltenen ersten Oberschwingungen.

Symmetrie: u(t) ist eine gerade Funktion → keine sin-Anteile in der Fourier-Reihe → $b_1 = 0$.

Ergebnisse: $a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_1 = -\frac{2}{3 \cdot \pi}$, $a_2 = -\frac{2}{15 \cdot \pi}$, $a_3 = -\frac{2}{35 \cdot \pi}$, ...

Aufgabe 4

Wie Aufgabe 4, aber Einweg-Gleichrichtung:



Selber lösen!

Aufgabe 5

Ein Ball wird zum Zeitpunkt t=0 senkrecht nach oben geworfen, die Starthöhe $h(t=0) = h_0$ wird als $h_0 = 0$ festgelegt, die Startgeschwindigkeit $v_0 = v(t=0)$ ist unbekannt. Aus mehreren Messungen der Bahnhöhe h=h(t) soll trotz der dabei unvermeidlichen Messfehler e=e(t) die Gravitationskonstante g möglichst genau bestimmt werden. Die Größen t, h_0, v_0 und g hängen nach den Gesetzen der Mechanik allgemein über die Funktion

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}$$ zusammen.

Aus welcher Gleichung lässt sich ein möglichst genauer Schätzwert (= Repräsentant) $\hat{g}$ mit

$$|\hat{g}-g| \rightarrow \min.$$

ermitteln, wenn n Messungen von t und h(t) gemacht werden (n>2).

Hinweis: Verwenden Sie die Fehlergleichung $e(t)=h(t)-h_0+v_0 \cdot t-g \cdot \frac{t^2}{2}$ und führen Sie eine lineare Regression für $v_{0,}$ g durch. Sie erhalten hierfür ein lineares Gleichungssystem.

(Lösung wird ergänzt)

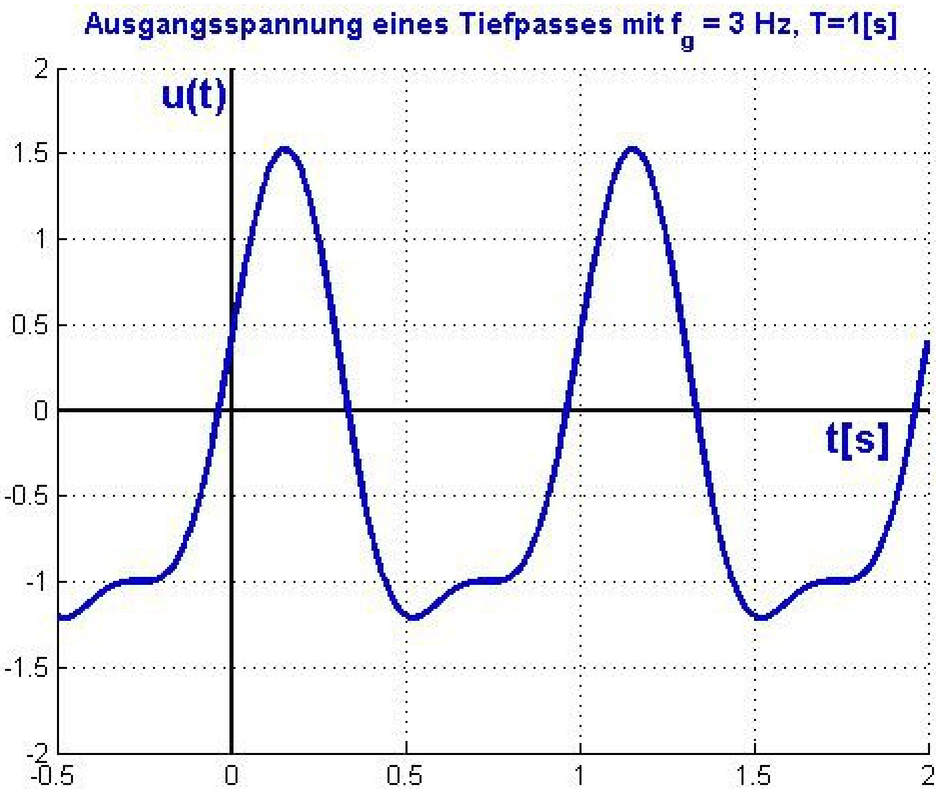
Aufgabe 6

Beantworten Sie die Fragen von Aufgabe 5 für den Fall, dass auch die Starthöhe h_0 unbekannt ist.

(Lösung wird ergänzt)

Aufgabe 7

Die mit T = 1s periodische Ausgangsspannung eines Tiefpasses der Grenzfrequenz $f_g=3$ Hz zeigt auf einem Oszillografen folgenden Verlauf:



Da u(t) wegen der Bandbegrenzung bei der Fourier-Reihendarstellung keine Oberschwingungen über 3 Hz enthalten kann, werden aus dem Oszillogramm im Abstand $\frac{T}{6}$ insgesamt 6 Werte abgelesen:

u(0) = 0.4 (jeweils in Volt)

u(T/6) = 1.5

u(2T/6) = 0.02

u(3T/6) = -1.2

u(4T/6) = -1.0

u(5T/6) = -0.9

Bestimmen Sie mit dem Verfahren der diskreten Fourier-Transformation (DFT) die Amplituden bis zur zweiten Oberschwingung, also $a_{0,}$ $a_{1,}$ $a_{2,}$ $b_{1,}$ b_2 . Runden Sie die Ergebnisse auf eine Nachkommastelle und berücksichtigen Sie, dass gemäß der Formel im Skript die wahren Amplituden das Doppelte des errechneten Wertes betragen.

Die Funktion u(t) wurde als Fourier-Reihe mit folgenden Amplituden (= Koeffizienten) erzeugt:

$$a_0 = -0.2 \;,\quad a_1 = 0.8 \;,\quad a_2 = -0.2 \;,\quad a_{3,}\; a_{4,}\; ... = 0$$

$$b_0 = 0 \;,\quad b_1 = 1 \;,\quad b_2 = 0.4 \;,\quad b_{3,}\; b_{4,}\; ... = 0$$

Vergleichen Sie diese Werte mit Ihren Ergebnissen.