Mathematik II - Übungsblatt 05

Aufgabe 0 (zum Anwärmen)

Gegeben ist eine unbekannte Funktion $w=w(u)$. Man weiß von w nur, dass w und die erste Ableitung $w'=\frac{dw}{du}$ über die Differenzialgleichung $5\cdot w'+2\cdot w=0$ zusammenhängen. Außerdem ist bekannt, dass $w(u=0)$ den Wert -3 annimmt.

a) Geben Sie den allgemeinen Lösungansatz an, der die Differenzialgleichung für **alle** $u\in R$ erfüllt.

b) Bestimmen Sie den Eigenwert der DGL. **Hinweis:** Der Eigenwert ist bei DGLs diejenige Konstante im Exponenten des Ansatzes für die homogene Lösung, mit der die homogene DGL für alle u erfüllt wird).

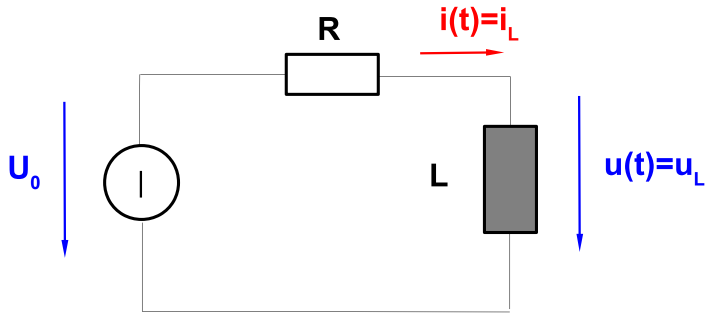
c) Prüfen Sie, ob die DGL mit diesem Eigenwert erfüllt ist.

d) Ermitteln Sie die verbleibende Konstante im allgemeinen Lösungsansatz nach a) so, dass auch die Bedingung $w(u=0)=-3$ erfüllt wird.

e) Zeichnen Sie die Funktion $w=w(u)$ für $0\leq u<\infty$ (grobe Skizze, aus der aber die wesentlichen Eigenschaften erkennbar sind).

Aufgabe 1

Gegeben ist folgende (Hochpass-) Schaltung:



Die speisende Gleichspannung U_0 hat für t<0 den Wert $U_0(t<0)=0$, sonst $U_0(t\geq 0)=5[\text{Volt}]$, außerdem fließt für t<0 kein Strom, $i(t<0)=0$.

Gesucht ist der Spannungsverlauf $u(t\geq 0)$ an der Induktivität L, $U_{0,}$ R, L sind gegeben.

Für die Spannungssumme in der Masche gilt

$$U_0-u(t)-R\cdot i(t)=0 \quad\rightarrow\quad u+R\cdot i=U_0 \quad .$$

Spannungen an Induktivitäten sind ganz allgemein immer proportional zur zeitlichen Ableitung des Stromes:

$$u=L\cdot\frac{di}{dt}=L\cdot i' \quad (\mathrm{I})\rightarrow \quad L\cdot i'+R\cdot i=U_0 \quad\rightarrow\quad \frac{L}{R}\cdot i'+i=\frac{U_0}{R} \quad\rightarrow\quad T_1\cdot i'+i=\frac{U_0}{R}$$

Es liegt eine Differenzialgleichung für den Spulenstrom $i_l=i(t)$ vor.

Wenn i ermittelt wurde, lässt sich die Spannung u durch Differenzieren aus Gleichung (I) bestimmen.

a) Geben Sie den Typ der DGL an (mehrere Eigenschaften)

b) Ermitteln Sie die homogene Lösung $i_h = i_h(t)$.

c) Wie sieht die partikuläre Lösung i_p aus?

d) Gesamtlösung $i = i_L(t)$?

e) Spezielle Lösung für die Anfangsbedingung $i_L(t=0)=0$?

f) Skizzieren Sie $i_L(t \geq 0)$ in einem Zeitdiagramm und tragen Sie die Tangente für $i_L(t=0)$ ein

g) Bestimmen Sie $u_L(t \geq 0)$ und fügen Sie den Verlauf zusammen mit der Tangente in $u_l(t=0)$ in das Diagramm aus f) ein.

Aufgabe 2

Gegeben ist die unbekannte Funktion y = y(t). Zwischen der ersten und zweiten Ableitung gibt es den Zusammenhang

$$\ddot{y} + 3 \cdot \dot{y} + 2 \cdot y = 1 \quad .$$

Außerdem sind die Anfangsbedingungen

$y(t=0)=3 \qquad \dot{y}(t=0)=0$ bekannt.

a) Stellen Sie die homogene DGL auf.

b) Geben Sie einen Lösungsansatz für die homogene DGL an.

c) Bestimmen Sie mithilfe von b) die Eigenwerte der DGL (Zu „Eigenwerte“ siehe Aufgabe 0b).

d) Was ist die allgemeine Lösung y_h für die homogene DGL?

e) Bestimmen Sie eine stationäre Lösung y_{st} für die DGL.

f) Prüfen Sie, ob die stationäre Lösung nach e) die DGL erfüllt.

g) Geben Sie die allgemeine Lösung y=y(t) der inhomogenen DGL an.

h) Bestimmen Sie die beiden Konstanten der allgemeinen homogenen Lösung aus den Anfangsbedingungen.

i) Stellen Sie die Gesamtlösung der DGL auf.

j) Skizzieren Sie grob die gefundene Funktion y(t). Hinweis: Beachten Sie, welche Tangente die Funktion y im Punkt t=0 hat.

Aufgabe 3

Die Räder eines Fahrzeugs sind – geführt über Gelenke und „weich“ über Federn aufgehängt– mit der Karosserie verbunden. Die Masse m der Radanordnung (Felge, Reifen, Lager, Lagerschale, Gelenkkonstruktion) kann in erster Näherung als sehr klein – und damit vernachlässigbar – gegen die übrige Fahrzeugmasse M angesehen werden (m ca. 50 kg, M ca 1500 kg).

Während der Fahrt wird die Radanordnung durch die Unebenheiten der Fahrbahn fortwährend mit äußeren Kräften be- und entlastet, d. h. beschleunigt und entlastet. Insbesondere in der Entlastungsphase soll das Rad den Bodenkontakt behalten, damit Seitenführung und Bremsfähigkeit über die Roll- und Haftreibung immer gewährleistet bleibt. Die Radkonstruktion darf u. a. nicht schwingen, wofür die Stoßdämpfer sorgen sollen. Zur Beschreibung des Bewegungsverhaltens in der senkrechten z-Richtung kann man die Gleichgewichtsbedingung der am Rad angreifenden Kräfte verwenden:

$$m \cdot \ddot{z} + k_D \cdot \dot{z} + k_F \cdot z = F$$

Hierin bedeuten:

- k_D : Dämpfungswert des Stoßdämpfers
- k_F : Federkonstante
- F : äußere Kraftwirkung auf das Rad durch die Unebenheiten bei Fahrzeugbewegung.

Die (unbeabsichtigte) Fahrt auf einen Bordstein zum Zeitpunkt t=0 entspricht einer sprungförmigen Krafteinwirkung auf die Radanordnung.

a) Bestimmen Sie für den Fall $z(t=0)=0$, $\dot{z}(t=0)=0$ den Bewegungsverlauf des Rades in der vertikalen z-Richtung.

b) Für welche Wertepaare k_D, k_F beginnt das System zu schwingen? (Eigenwerte werden konjugiert komplex).

Aufgabe 4 (Wiederholung zur Vorbereitung der Bestimmung nicht konstanter partikulärer Lösungen)

a) Gegeben: $u = e^{(a+jb)\cdot t} + e^{(a-jb)\cdot t}$. Formen Sie u = u(t) so um, dass sich ein rein reeller Ausdruck ergibt.

b) Gegeben: $x = A_1 \cdot e^{(1+j)\cdot t} + A_2 \cdot e^{(1-j)\cdot t}$ und $x(t=0)=1$, $\ddot{x}(t=0)=0$.

a) Bestimmen Sie A_1 und A_2.

b) In welchem Zusammenhang stehen A_1 und A_2 zueinander?

c) Bestimmen Sie x=x(t) so, dass sich eine rein reelle Funktion ergibt.