Mathematik II - Übungsblatt 05
mit Lösungsvorschlägen

Aufgabe 0 (zum Anwärmen)

Gegeben ist eine unbekannte Funktion $w = w(u)$. Man weiß von w nur, dass w und die erste Ableitung $w' = \frac{dw}{du}$ über die Differenzialgleichung $5 \cdot w' + 2 \cdot w = 0$ zusammenhängen. Außerdem ist bekannt, dass $w(u=0)$ den Wert -3 annimmt.

a) Geben Sie den allgemeinen Lösungsansatz an, der die Differenzialgleichung für **alle** $u \in R$ erfüllt.

$$w = A \cdot e^{a \cdot u}$$

b) Bestimmen Sie den Eigenwert der DGL. **Hinweis:** Der Eigenwert ist bei DGLs diejenige Konstante im Exponenten des Ansatzes für die homogene Lösung, mit der die homogene DGL für alle u erfüllt wird).

$$w' = a \cdot A \cdot e^{a \cdot u}$$

In DGL einsetzen: $5 \cdot a \cdot A \cdot e^{a \cdot u} + 2 \cdot A \cdot e^{a \cdot u} = 0$ (= charakteristische Gleichung).

- Die Lösung muss für alle Werte von u gültig sein. Mit $u \to -\infty$ erhält man wegen $e^{a \cdot (-\infty)} = 0$ zwar eine Lösung, das reicht aber nicht.
- Die Lösung mit A = 0 ergibt w = 0 und ist daher trivial (uninteressant).

Da also weder $e^{a \cdot (-\infty)} = 0$ noch A=0 für Lösungen in Frage kommen, darf die charakteristische Gleichung durch beide Faktoren dividiert werden:

$$5 \cdot a + 2 = 0 \quad \to \quad a = -\frac{2}{5}$$ (a ist Eigenwert).

c) Prüfen Sie, ob die DGL mit diesem Eigenwert erfüllt ist.

Mit dem Eigenwert a ist die DGL für alle u und A erfüllt:

$$5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot A \cdot e^{-\frac{2}{5} \cdot u} + 2 \cdot A \cdot e^{-\frac{2}{5} \cdot u} = -2 \cdot A\, e^{-\frac{2}{5} \cdot u} + 2 \cdot A\, e^{-\frac{2}{5} \cdot u} = 0$$

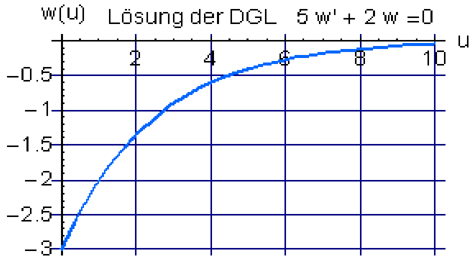
d) Ermitteln Sie die verbleibende Konstante im allgemeinen Lösungsansatz nach a) so, dass auch die Bedingung $w(u=0) = -3$ erfüllt wird.

Die Lösung muss auch der Anfangsbedingung w(u=0) = -3 genügen. Daraus kann die Konstante A bestimmt werden:

$w(u=0) = A \cdot e^{a \cdot 0} = A \cdot 1 = -3$ → A = -3 (Hinweis: **Immer** gilt $e^{a \cdot 0} = e^0 = 1$)

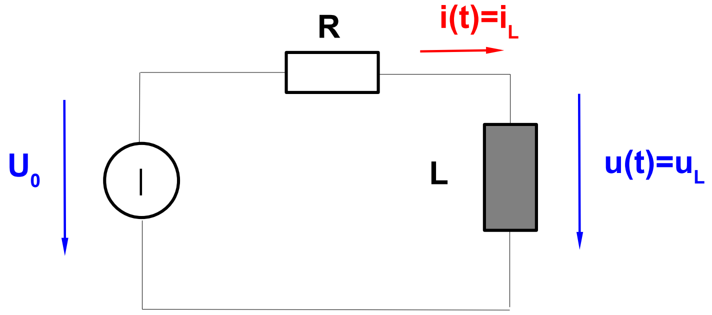
Damit ist die vollständige Lösung $w = -3 \cdot e^{-\frac{2}{5} \cdot u}$.

e) Zeichnen Sie die Funktion $w = w(u)$ für $0 \le u < \infty$ (grobe Skizze, aus der aber die wesentlichen Eigenschaften erkennbar sind).



Aufgabe 1

Gegeben ist folgende (Hochpass-) Schaltung:



Die speisende Gleichspannung U_0 hat für t<0 den Wert $U_0(t<0)=0$, sonst $U_0(t\geq 0)=5[\text{Volt}]$, außerdem fließt für t<0 kein Strom, $i(t<0)=0$.

Gesucht ist der Spannungsverlauf $u(t\geq 0)$ an der Induktivität L, $U_{0,}$ R, L sind gegeben.

Für die Spannungssumme in der Masche gilt

$$U_0-u(t)-R\cdot i(t)=0 \quad\rightarrow\quad u+R\cdot i=U_0 \quad .$$

Spannungen an Induktivitäten sind ganz allgemein immer proportional zur zeitlichen Ableitung des Stromes:

$$u=L\cdot\frac{di}{dt}=L\cdot i' \quad (\mathrm{I})\rightarrow \quad L\cdot i'+R\cdot i=U_0 \quad\rightarrow\quad \frac{L}{R}\cdot i'+i=\frac{U_0}{R} \quad\rightarrow\quad T_1\cdot i'+i=\frac{U_0}{R}$$

Es liegt eine Differenzialgleichung für den Spulenstrom $i_L=i(t)$ vor.

Wenn i ermittelt wurde, lässt sich die Spannung u durch Differenzieren aus Gleichung (I) bestimmen.

a) Geben Sie den Typ der DGL an (mehrere Eigenschaften)

Die DGL ist erster Ordnung, linear, inhomogen, hat konstante Koeffizienten, eine konstante rechte Seite (Prüfen Sie jeden Punkt nach!).

b) Ermitteln Sie die homogene Lösung $i_{Lh}=i_{Lh}(t)$.

$$i_{Lh}=A\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

c) Wie sieht die partikuläre Lösung i_{Lp} aus? $i_{Lp}=\dfrac{U_0}{R}$

d) Gesamtlösung $i = i_L(t)$?

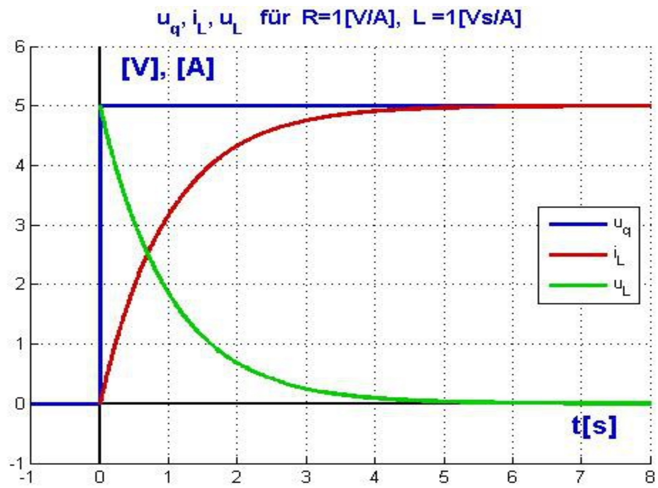
$$i_L(t) = i_{Lh} + i_{Lp} = A \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{U_0}{R}$$

e) Spezielle Lösung für die Anfangsbedingung $i_L(t=0)=0$? $A = -\frac{U_0}{R}$

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

f) Skizzieren Sie $i_L(t \geq 0)$ in einem Zeitdiagramm und tragen Sie die Tangente für $i_L(t=0)$ ein

g) Bestimmen Sie $u_L(t \geq 0)$ und fügen Sie den Verlauf zusammen mit der Tangente in $u_l(t=0)$ in das Diagramm aus f) ein.



Aufgabe 2

Gegeben ist die unbekannte Funktion y = y(t). Zwischen der ersten und zweiten Ableitung gibt es den Zusammenhang

$$\ddot{y} + 3 \cdot \dot{y} + 2 \cdot y = 1 \quad .$$

Außerdem sind die Anfangsbedingungen

$y(t=0)=3 \quad \dot{y}(t=0)=0$ bekannt.

a) Stellen Sie die homogene DGL auf.

$$\ddot{y} + 3 \cdot \dot{y} + 2 \cdot y = 0$$

b) Geben Sie einen Lösungsansatz für die homogene DGL an.

$$y_h = A \cdot e^{a \cdot t}$$

c) Bestimmen Sie mithilfe von b) die Eigenwerte der DGL (Zu „Eigenwerte“ siehe Aufgabe 0b).

$a_1 = -1 \quad , \quad a_2 = -2$

d) Was ist die allgemeine Lösung y_h für die homogene DGL?

Zu jedem Eigenwert gibt es eine unabhängige Teillösung mit einer eigenen Konstanten. Die homogene Gesamtlösung ist daher die Summe:

$$y_h = A_1 \cdot e^{-1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-2 \cdot t}$$

e) Bestimmen Sie eine stationäre Lösung y_{st} für die DGL.

Eine stationäre (= partikuläre) Lösung erfüllt die DGL auch für $t \rightarrow \infty$. Dann sind die homogenen Teile abgeklungen. Daher ist

$$y_{st} = y_p = \frac{1}{2}$$ (Probe durch Einsetzen in die inhomogene DGL)

f) Prüfen Sie, ob die stationäre Lösung nach e) die DGL erfüllt. (siehe e)

g) Geben Sie die allgemeine Lösung (Gesamtlösung) y=y(t) der inhomogenen DGL an.

$$y(t) = A_1 \cdot e^{-1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-2 \cdot t} + \frac{1}{2}$$

h) Bestimmen Sie die beiden Konstanten der allgemeinen homogenen Lösung aus den Anfangsbedingungen.

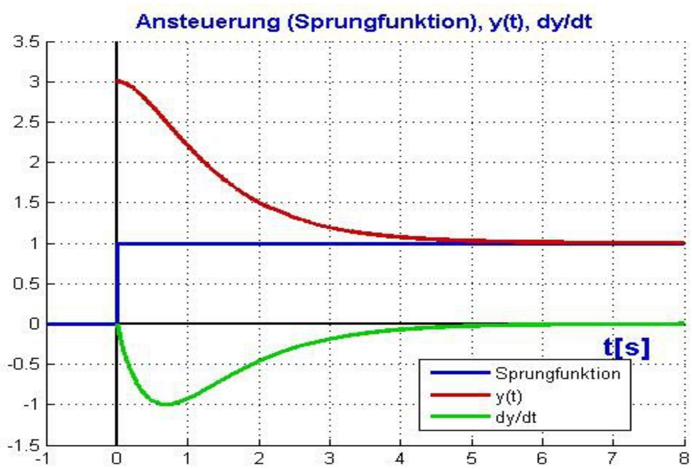
$$y(t=0) = A_1 + A_2 + \frac{1}{2} = 3$$

$$\dot{y}(t=0) = -A_1 - 2 \cdot A_2 = 0$$

Dies ist ein LGS für $A_1,\ A_2$ → selber lösen!

i) Stellen Sie die Gesamtlösung der DGL für die gegebenen Anfangsbedingung auf. → Selber machen!

j) Skizzieren Sie grob die gefundene Funktion y(t). Hinweis: Beachten Sie, welche Tangente die Funktion y im Punkt t=0 hat.



Aufgabe 3

Die Räder eines Fahrzeugs sind – geführt über Gelenke und „weich“ über Federn aufgehängt– mit der Karosserie verbunden. Die Masse m der Radanordnung (Felge, Reifen, Lager, Lagerschale, Gelenkkonstruktion) kann in **erster Näherung** als sehr klein – und damit vernachlässigbar – gegen die übrige Fahrzeugmasse M angesehen werden (m ca. 50 kg, M ca 1500 kg).

Während der Fahrt wird die Radanordnung durch die Unebenheiten der Fahrbahn fortwährend mit äußeren Kräften be- und entlastet, d. h. beschleunigt und entlastet. Insbesondere in der Entlastungsphase soll das Rad den Bodenkontakt behalten, damit Seitenführung und Bremsfähigkeit über die Roll- und Haftreibung immer gewährleistet bleibt. Die Radkonstruktion darf u. a. nicht schwingen, wofür die Stoßdämpfer sorgen sollen. Zur Beschreibung des Bewegungsverhaltens in der senkrechten z-Richtung kann man die Gleichgewichtsbedingung der am Rad angreifenden Kräfte verwenden:

$$m \cdot \ddot{z} + k_D \cdot \dot{z} + k_F \cdot z = F$$

Hierin bedeuten:

- k_D : Dämpfungswert des Stoßdämpfers
- k_F : Federkonstante
- F : äußere Kraftwirkung auf das Rad durch die Unebenheiten bei Fahrzeugbewegung.

Die (unbeabsichtigte) Fahrt auf einen Bordstein zum Zeitpunkt t=0 entspricht einer sprungförmigen Krafteinwirkung auf die Radanordnung.

a) Bestimmen Sie für den Fall $z(t=0)=0$, $\dot{z}(t=0)=0$ den Bewegungsverlauf des Rades in der vertikalen z-Richtung.

Eigenwerte a_1, a_2 selbst ermitteln! → Vergleichen mit den Ergebnissen im **Skript Kapitel 14.1.**

$$z(t) = A_1 \cdot e^{a_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{a_2 \cdot t} + \frac{F}{k_F}$$

b) Für welche Wertepaare k_D, k_F beginnt das System zu schwingen? (Eigenwerte werden konjugiert komplex).

Selbst ermitteln! Sehen Sie sich die Ergebnisse und Diagramme im **Skript Kapitel 14.1** an.

Aufgabe 4 (Wiederholung zur Vorbereitung der Bestimmung nicht konstanter partikulärer Lösungen)

a) Gegeben: $u = e^{(a+jb)\cdot t} + e^{(a-jb)\cdot t}$. Formen Sie u = u(t) so um, dass sich ein rein reeller Ausdruck ergibt.

Selber machen, schauen Sie im Stoff für Semester 1 **(Skript Kapitel 10)** nach!

b) Gegeben: $x = A_1 \cdot e^{(1+j)\cdot t} + A_2 \cdot e^{(1-j)\cdot t}$ und $x(t=0)=1$, $\dot{x}(t=0)=0$.

a) Bestimmen Sie A_1 und A_2.

b) In welchem Zusammenhang stehen A_1 und A_2 zueinander?

c) Bestimmen Sie x=x(t) so, dass sich eine rein reelle Funktion ergibt.

Alles selber machen, siehe **(Skript Kapitel 10)**