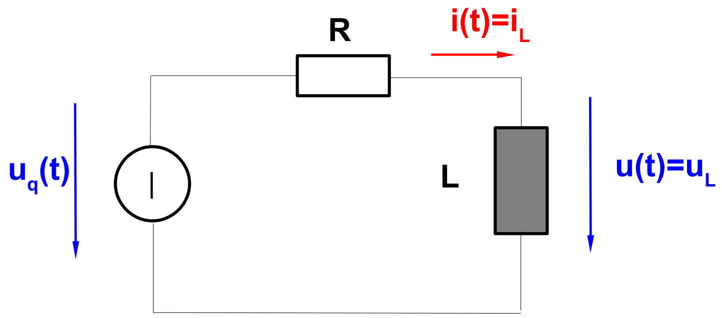
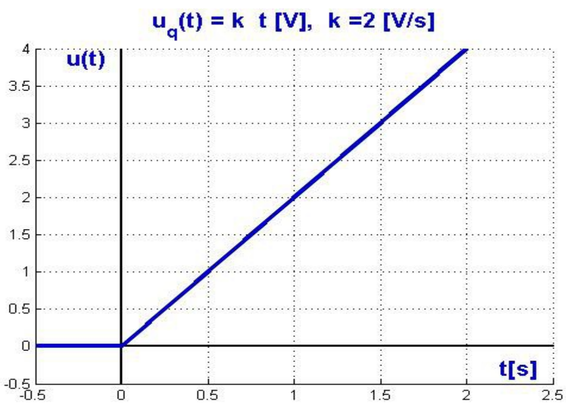
Mathematik II - Übungsblatt 06

Aufgabe 1

Der Hochpass aus Übungsblatt 05, Aufgabe 1, soll nun durch eine zeitlich veränderliche Spannungsquelle $u_q = u_q(t)$ gespeist werden:



Die Anfangsbedingung für den Strom ist wieder $i(t=0)=0$. Der Spannungsverlauf steigt für $0 \le t \le 2[s]$ rampenförmig mit $u_q(t)=k \cdot t$ an, $k=2[V/s]$:



a) Ermitteln Sie den Verlauf der Spannung $u_L(t)$.

Hinweis: Zuerst den Strom $i_L(t)$ bestimmen. Die DGL hierfür ergibt sich aus den Grundgesetzen der Elektrotechnik:

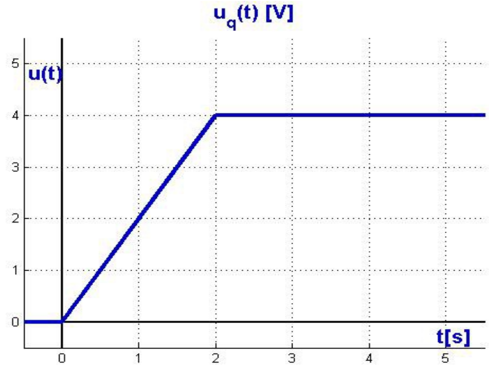
$$T_1 \cdot i'_L + i_L = \frac{1}{R} \cdot u_q(t) \quad , \quad T_1 = \frac{L}{R} \quad .$$

Daraus:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} \quad .$$

b) Skizzieren Sie grob den Verlauf des Spulenstromes und der Spulenspannung.

Für $t \geq 2[s]$ bleibt $u_q(t)=2[V]$ konstant:



c) Skizzieren Sie grob den Strom- und Spannungsverlauf.

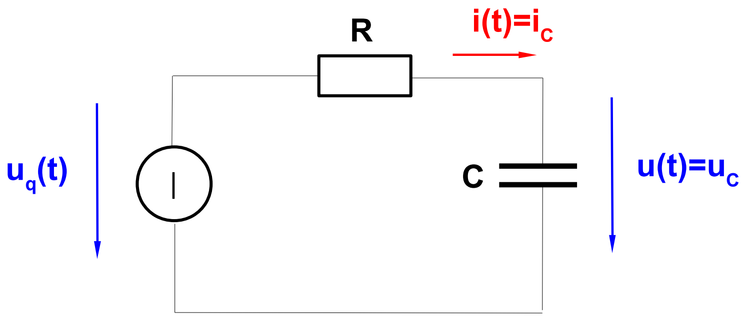
d) Welche Lösung hat die DGL für $t \geq 2[s]$? Hinweis: Beachten Sie den Stromwert zum Zeitpunkt $t=2[s]$, der sich aus dem vorhergehenden Zeitabschnitt ergibt. Er stellt die Anfangsbedingung für den neuen Zeitabschnitt dar.

e) Wie sieht nun die Gesamtlösung der DGL für $t \geq 0$ aus? Hinweis: In zwei Zeitabschnitte unterteilen.

f) Skizzieren Sie grob den gesamten Strom- uns Spannungsverlauf.

Aufgabe 2

Gegeben ist folgende (Tiefpass-) Schaltung:



Sie wird durch die Spannung $u_q=\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t)$ gespeist. Ermitteln Sie für die Anfangsbedingung $u_C(t=0)=0$ aus der DGL

$$T_1\cdot\dot{u}_C+u_C=u_q(t) \quad , \quad T_1=R\cdot C(s)$$

den Verlauf der Kondensatorspannung.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie **nur** die partikuläre (= stationäre) Lösung $u_{Cp}(t)$ zu Aufgabe 2 mithilfe der komplexen Rechnung. Hinweise:

- Es gelten die trigonometrischen Umformungen:

$$\cos(x)=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x)=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

- Setzen Sie

$$u_q(t)=\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t)=\hat{u}\cdot\frac{e^{j\cdot\omega\cdot t}-e^{-j\cdot\omega\cdot t}}{2j} \quad ,$$

$$u_{Cp}(t)=k\cdot\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t-\phi)=\hat{u}\cdot\frac{e^{j\cdot(\omega\cdot t-\phi)}-e^{-j\cdot(\omega\cdot t-\phi)}}{2j}$$

- Beachten Sie die Potenzrechnung $e^{a+b}=e^a\cdot e^b$
- und $\frac{1}{j}=\frac{1\cdot(-j)}{j\cdot(-j)}=\frac{-j}{(-1)\cdot(-1)}=-j$.

Die Lösung ist eine stationäre Schwingung mit $\sin(\omega\cdot t)$ sowie einem Amplitudenfaktor k und einer Phasenverschiebung ϕ . Da der Schwingungsanteil bereits bekannt ist, müssen nur k und ϕ bestimmt werden. Diese beiden Konstanten bilden einen zeitunabhängigen komplexen Zeiger $\tilde{U}=k\cdot e^{j\cdot\phi}$. In der Wechselstromrechnung kann man sich daher auf die Berechnung dieses Zeigers beschränken, was den Aufwand erheblich vermindert. In der komplexen DGL „schafft" jede Ableitung nach der Zeit den Term ω in $e^{\omega\cdot t}$ vor die e-Funktion. Aus $C\frac{d\,e^{j\cdot\omega}}{dt}$ wird z. B. $j\cdot\omega\cdot C\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$ usw.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für den Fall der Aufgabe 1 den Spulenstrom $i_L(t)$ mithilfe der Laplacetransformation. Hinweise:

- Die DGL

$$T_1\cdot i'_L+i_L=\frac{1}{R}\cdot u_q(t) \quad , \quad T_1=\frac{L}{R}$$ geht bei der Laplace-Transformation über in

$$T_1\cdot s\cdot I_L(s)+I_L(s)=\frac{1}{R}\cdot U_q(s)$$ mit der komplexen Frequenz $s=\sigma+j\omega$.

Für den rampenförmigen Verlauf $u_q(t)=k\cdot t$ ist die L-Transformierte $U_q(s)=\frac{k}{s^2}$. Man findet solche Laplace-Transformierte für einfache Funktionen in vielen Formelsammlungen.

- Einsetzen und Auflösen nach $I_L(s)$ ergibt

$$I_L(s)=\frac{k}{s^2}\cdot\frac{1}{T_1\cdot s+1}$$

- Partialbruchzerlegung in s anwenden und die einzelnen Terme (Anzahl 3) mithilfe einer Formelsammlung in den Zeitbereich zurücktransformieren → gesuchte Lösung $i_L(t)$.