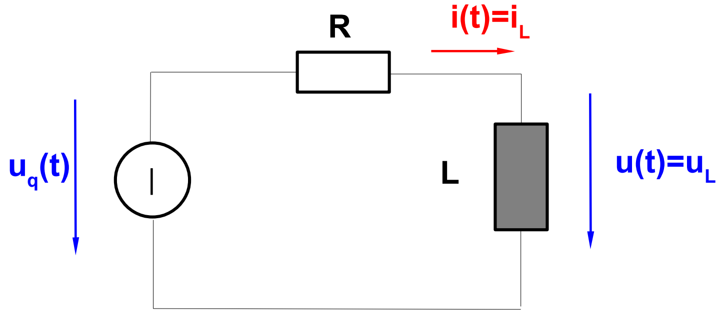
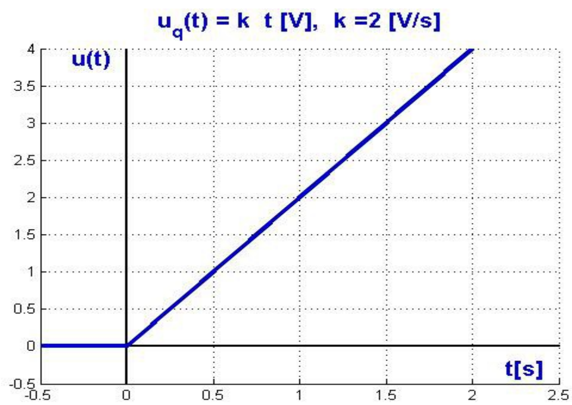
Mathematik II - Übungsblatt 06
mit Lösungsvorschlägen

Aufgabe 1

Der Hochpass aus Übungsblatt 05, Aufgabe 1, soll nun durch eine zeitlich veränderliche Spannungsquelle $u_q = u_q(t)$ gespeist werden:



Die Anfangsbedingung für den Strom ist wieder $i(t=0)=0$. Der Spannungsverlauf steigt für $0 \le t \le 2[s]$ rampenförmig mit $u_q(t) = k \cdot t$ an, $k = 2[V/s]$:



a) Ermitteln Sie den Verlauf der Spannung $u_L(t)$.

Hinweis: Zuerst den Strom $i_L(t)$ bestimmen. Die DGL hierfür ergibt sich aus den Grundgesetzen der Elektrotechnik:

$$T_1 \cdot i'_L + i_L = \frac{1}{R} \cdot u_q(t) \quad , \quad T_1 = \frac{L}{R} \quad .$$

Daraus:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} \quad .$$

Homogene Lösung $i_L(t)$: $i_{Lh} = A \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$

Partikuläre Lösung $i_{Lp}(t)$: Diese muss für $t \to \infty$ dem Verlauf der Speisespannung folgen. Der Ansatz ist daher eine Geradengleichung der Form

$i_{Lp} = m \cdot t + b$. Die Steigung wird mit derjenigen von $\frac{u_q(t)}{R} = \frac{k}{R} \cdot t$ übereinstimmen, also ist

$m = \frac{k}{R}$. Es bleibt die Ermittlung der Konstanten b.

Dazu ist zu berücksichtigen, dass jede homogene und partikuläre Lösung die DGL jeweils für sich erfüllen muss. Für die partikuläre Lösung gilt demnach mit

$$i_{Lp}' = m \quad \rightarrow \quad T_1 \cdot m + m \cdot t + b = \frac{K}{R} \cdot t = (T_1 \cdot m + b) + m \cdot t \quad .$$

Diese Gleichung gilt für alle t, der Koeffizienten bei t ist $m = \frac{k}{R}$, der Rest $T_1 \cdot m + b = 0$.

Daraus folgt $b = -T_1 \cdot \frac{k}{R}$.

Die allgemeine Lösung: $i_L(t) = i_{Lh} + i_{Lp} = A \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{k}{R} \cdot (t - T_1)$.

Die Konstante A wird aus der Anfangsbedingung (= AB) bestimmt:

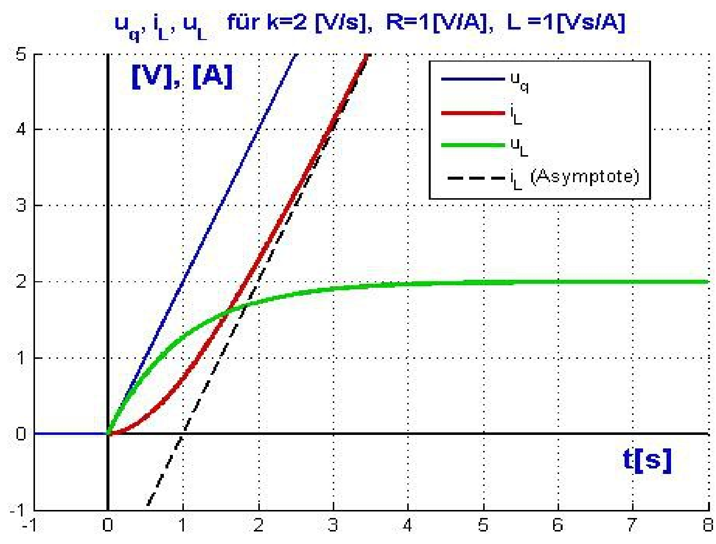
$$i_L(t=0) = A \cdot e^{-\frac{0}{T_1}} + \frac{k}{R} \cdot (t - T_1) = 0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{k}{R} \cdot T_1 \quad .$$

Lösung für diese AB:

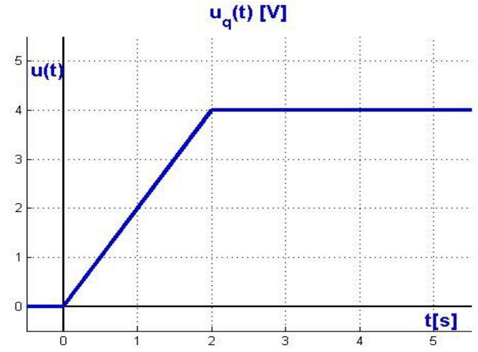
$$i_L(t) = i_{Lh} + i_{Lp} = \frac{k}{R} \cdot \left[T_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + t - T_1 \right] \quad \text{und}$$

$$u_L(t) = \frac{L \cdot k}{R} \cdot \left[T_1 \cdot \left(\frac{-1}{T_1} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + 1 \right] = T_1 \cdot k \left[1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right] \quad (\text{mit} \quad T_1 = \frac{L}{R} \quad).$$

b) Skizzieren Sie grob den Verlauf des Spulenstromes und der Spulenspannung.



Für $t \geq 2[s]$ bleibt $u_q(t) = 2[V]$ konstant:



c) Welche Lösung hat die DGL für $t \geq 2[s]$? Hinweis: Beachten Sie den Stromwert zum Zeitpunkt $t = 2[s]$, der sich aus dem vorhergehenden Zeitabschnitt ergibt. Er stellt die Anfangsbedingung für den neuen Zeitabschnitt dar.

Für den Zeitabschnitt $t \geq 2s$ lässt sich die neue Zeit $t^* = t - 2$ einführen. Dann gilt ab t = 2 s die Lösung

$$i_L(t^*) = A^* \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{4}{R} \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad i_L(t^* = 0) = i_L(t = 2) = \frac{k}{R} \cdot \left[T_1 \cdot e^{-\frac{2}{T_1}} + 2 - T_1 \right] .$$

Daraus lässt sich A^* bestimmen. → selber machen.

d) Wie sieht nun die Gesamtlösung der DGL für $t \geq 0$ aus? Hinweis: In zwei Zeitabschnitte unterteilen.

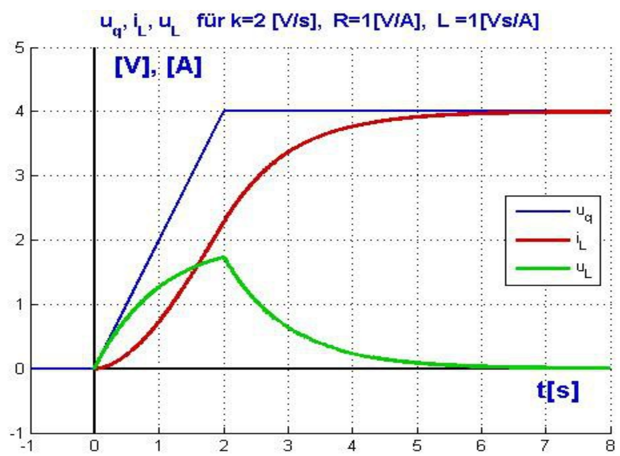
Die Gesamtlösung setzt sich aus diesen beiden Abschnitten zusammen:

Für $0 \leq t \leq 2$: $$i_L(t) = \frac{k}{R} \cdot \left[T_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + t - T_1 \right] ,$$

für $t \geq 0$: $$i_L(t^*) = i_L(t - 2) = A^* \cdot e^{-\frac{(t-2)}{T_1}} + \frac{4}{R}$$

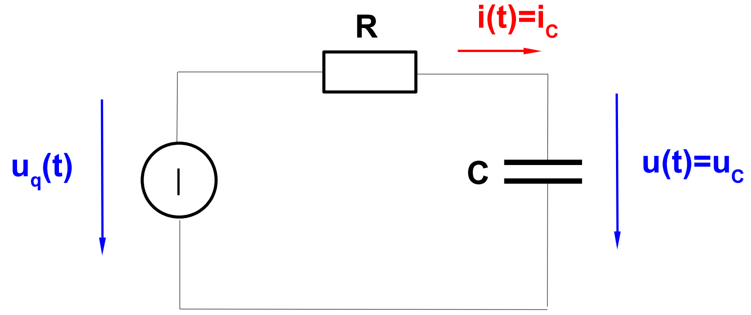
Für $u_L(t)$ → selber machen mit $u_L(t) = u_q(t) - R \cdot i_L(t)$ oder $u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}$.

e) Skizzieren Sie grob den gesamten Strom- uns Spannungsverlauf.



Aufgabe 2

Gegeben ist folgende (Tiefpass-) Schaltung:



Sie wird durch die Spannung $u_q = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ gespeist. Ermitteln Sie für die Anfangsbedingung $u_C(t=0)=0$ aus der DGL

$$T_1 \cdot \dot{u}_C + u_C = u_q(t) \quad , \quad T_1 = R \cdot C(s)$$

den Verlauf der Kondensatorspannung.

Homogene Lösung: $u_{Ch}(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$.

Die partikuläre Lösung (= diejenige Lösung, welche für große Zeiten in der Gesamtlösung übrig bleibt, da dann der homogene Lösungsanteil verschwunden ist $e^{-\frac{t}{T_1}} \xrightarrow{t \to \text{infintiy}} \to 0$) wird ausschließlich durch die rechte Seite der DGL bestimmt. Es muss daher eine sinus-ähnliche Funktion sein:

$$u_{Cp}(t) = k \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \quad .$$

Dieser Ansatz muss für sich die inhomogene DGL erfüllen. Mit

$$\dot{u}_{Cp}(t) = k \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \quad \text{wird}$$

$$T_1 \cdot k \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) + k \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad .$$

Man könnte die linke Seite durch trigonometrische Umformungen in eine reine Sinusfunktion umbauen und über einen Koeffizientenvergleich k und ϕ ermitteln.

Da diese Gleichung für beliebige Werte von t erfüllt ist, wird es wesentlich einfacher, wenn man spezielle Werte für $\omega \cdot t$ wählt.

$$\omega \cdot t = 0 \quad \to \quad T_1 \cdot k \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos(\phi) + k \cdot \hat{u} \cdot \sin(\phi) = \hat{u} \cdot \sin(0) = 0. \quad \to \quad tg(\phi) = -T_1 \cdot \omega$$

$$\phi = \arctg(-(T_1 \cdot \omega)) = -\arctg((T_1 \cdot \omega))$$

$$\omega \cdot t = -\phi \quad \to \quad T_1 \cdot k \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos(0) + k \cdot \hat{u} \cdot \sin(0) = \hat{u} \cdot \sin(-\phi) = -\hat{u} \cdot \sin(\phi)$$

$$T_1 \cdot \omega \cdot k = -\sin(\phi)$$

$$\sin(\phi) = \frac{tg(\phi)}{\sqrt{1 + (tg(\phi))^2}} \quad \to \quad k = \frac{1}{\sqrt{1 + (tg(\phi))^2}} = \cos(\phi) \quad .$$

Damit $\dot{u}_{Cp}(t) = \cos(\phi) \cdot \hat{u} \cdot \sin \cdot (\omega \cdot t - \arctg(T_1 \cdot \omega))$.

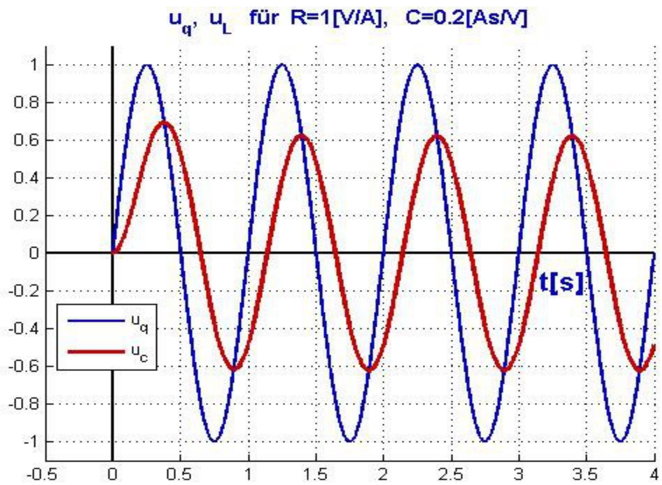
Die partikuläre Lösung hat also eine andere Amplitude als die rechte Seite und ist phasenverschoben.

Gesamtlösung:

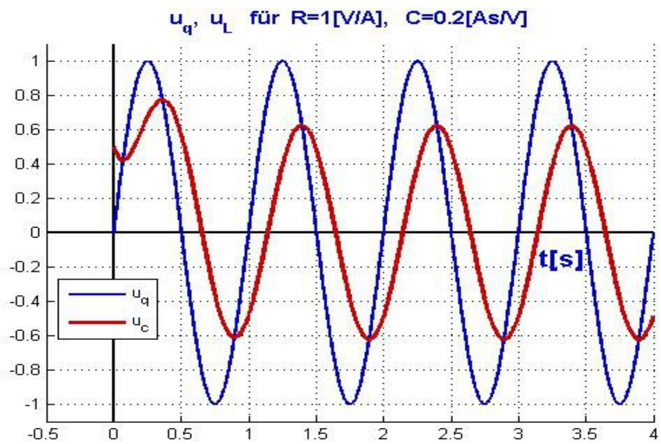
$$u_c(t) = u_{Ch} + u_{Cp} = A \cdot e^{-\frac{t}{T1}} + \cos(\phi) \cdot \hat{u} \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \operatorname{arctg}(T_1 \cdot \omega)\right)$$

Konstante A aus Anfangsbedingung $u_C(t=0) = 0 = A + \cos(\phi) \cdot \hat{u} \cdot \sin(-\operatorname{arctg}(T_1 \cdot \omega))$.

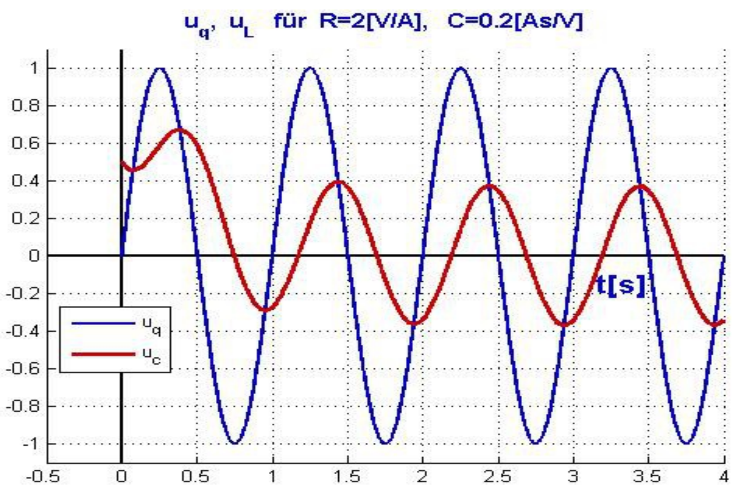
Zeitdiagramm:



Für AB $u_C(0) = 0.5$:



… und für R=2 (doppelte Zeitkonstante):



Aufgabe 3

Bestimmen Sie **nur** die partikuläre (= stationäre) Lösung $u_{Cp}(t)$ zu Aufgabe 2 mithilfe der komplexen Rechnung. Hinweise:

- Es gelten die trigonometrischen Umformungen:

$$\cos(x)=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x)=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

- Setzen Sie

$$u_q(t)=\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t)=\hat{u}\cdot\frac{e^{j\cdot\omega\cdot t}-e^{-j\cdot\omega\cdot t}}{2j} \quad ,$$

$$u_{Cp}(t)=k\cdot\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t-\phi)=\hat{u}\cdot\frac{e^{j\cdot(\omega\cdot t-\phi)}-e^{-j\cdot(\omega\cdot t-\phi)}}{2j}$$

- Beachten Sie die Potenzrechnung $e^{a+b}=e^a\cdot e^b$
- und $\frac{1}{j}=\frac{1\cdot(-j)}{j\cdot(-j)}=\frac{-j}{(-1)\cdot(-1)}=-j$.

Die Lösung ist eine stationäre Schwingung mit $\sin(\omega\cdot t)$ sowie einem Amplitudenfaktor k und einer Phasenverschiebung ϕ . Da der Schwingungsanteil bereits bekannt ist, müssen nur k und ϕ bestimmt werden. Diese beiden Konstanten bilden einen zeitunabhängigen komplexen Zeiger $\tilde{U}=k\cdot e^{j\cdot\phi}$. In der Wechselstromrechnung kann man sich daher auf die Berechnung dieses Zeigers beschränken, was den Aufwand erheblich vermindert. In der komplexen DGL „schafft" jede Ableitung nach der Zeit den Term ω in $e^{\omega\cdot t}$ vor die e-Funktion. Aus $C\frac{d\,e^{j\cdot\omega}}{dt}$ wird z. B. $j\cdot\omega\cdot C\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$ usw.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für den Fall der Aufgabe 1 den Spulenstrom $i_L(t)$ mithilfe der Laplacetransformation. Hinweise:

- Die DGL

$$T_1\cdot i'_L+i_L=\frac{1}{R}\cdot u_q(t) \quad , \quad T_1=\frac{L}{R}$$ geht bei der Laplace-Transformation über in

$$T_1\cdot s\cdot I_L(s)+I_L(s)=\frac{1}{R}\cdot U_q(s)$$ mit der komplexen Frequenz $s=\sigma+j\omega$.

Für den rampenförmigen Verlauf $u_q(t)=k\cdot t$ ist die L-Transformierte $U_q(s)=\frac{k}{s^2}$. Man findet solche Laplace-Transformierte für einfache Funktionen in vielen Formelsammlungen.

- Einsetzen und Auflösen nach $I_L(s)$ ergibt

$$I_L(s)=\frac{k}{R\cdot s^2}\cdot\frac{1}{T_1\cdot s+1}$$

- Partialbruchzerlegung in s anwenden und die einzelnen Terme (Anzahl 3) mithilfe einer Formelsammlung in den Zeitbereich zurücktransformieren → gesuchte Lösung $i_L(t)$.

Achtung: Dieser Lösungsweg kann zunächst nur angewendet werden, wenn alle Zeitvorgänge für t<0

Null sind! Die Funktion auf der rechten Seite der DGL muss Null sein und alle Energiespeicher sind entladen (eine Erweiterung auf nicht-entladene Energiespeicher zum Zeitpunkt t=0 ist aber möglich).

Zunächst wird die Laplace-Transformierte in einen Partialbruch-Ausdruck umgeformt:

$$I_L(s)=\frac{k}{R\cdot s^2}\cdot\frac{1}{T_1\cdot s+1}=\frac{k}{R\cdot T_1}\cdot\left[\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+\frac{1}{T_1}}\right] \quad .$$

$$\text{Mit} \quad s_1=\frac{1}{T_1} \quad \rightarrow \quad I_L(s)=\frac{k}{R\cdot T_1}\cdot\left[\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+s_1}\right]=\frac{k}{R\cdot T_1}\left[\frac{A\cdot s\cdot(s+s_1)+B\cdot(s+s_1)+C\cdot s^2}{s^2\cdot(s+s_1)}\right]$$

Die Koeffizienten B und C bestimmt man am einfachsten mit der Einsetzmethode:

$$s=0 \quad \rightarrow \qquad B=\frac{1}{s_1}=T_1$$

$$s=-\frac{1}{T_1} \quad \rightarrow \quad C=\frac{1}{s_1^2}=T_1^2$$

A erhält man durch Koeffizientenvergleich mit der linken Seite:

$$(A+C)\cdot s^2=0 \quad \rightarrow \quad A=-C=-T_1^2 \quad .$$

$$I_L(s)=\frac{k}{R\cdot s^2}\cdot\frac{1}{T_1\cdot s+1}=\frac{k}{R\cdot T_1}\cdot\left[-\frac{T_1^2}{s}+\frac{T_1}{s^2}+\frac{T_1^2}{s+\frac{1}{T_1}}\right]=\frac{k}{R}\cdot\left[-\frac{T_1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{T_1}{s+\frac{1}{T_1}}\right] \quad .$$

Rücktransformation der linken Seite und der 3 Summenterme auf der rechten Seite ergibt aus Tabellen:

$$i_L(t)=\frac{k}{R}\cdot\left[-T_1+t+T_1\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}\right]$$. (Vergleichen Sie diese Lösung mit der von 1a)

Zusatzaufgabe: Versuchen Sie diesen Weg auch für die Lösung der Aufgabe 2, hier liefert eine Tabelle

$$U_q(s)=\hat{u}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad .$$

… **und noch eine Zusatzaufgabe:**

Bestimmen Sie zu Aufgabe 2 von Blatt 05 die partikuläre Lösung zu

$$\ddot{y}+3\cdot\dot{y}+2\cdot y=\sin(\omega\cdot t) \quad .$$

Ansatz: $y_p(t)=k\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi)$. Daraus

$$\dot{y}_p(t)=k\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\phi)$$

$$\ddot{y}_p=-k\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi)$$ und einsetzen in DGL

$$-k\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi)+3\cdot k\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\phi)+2\cdot k\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi)=\sin(\omega\cdot t)$$

Da diese Gleichung für beliebige Zeitpunkte t gilt, kann man willkürlich besonders Geeignete einsetzen und erhält:

Für $\omega \cdot t = 0$ und nach einigen Umformungen:

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{3 \cdot \omega}{\omega^2 - 2}$$

Für $\omega \cdot t + \phi = 0$ und nach einigen Umformungen:

$$k = \frac{\sin(-\phi)}{3 \cdot \omega} = -\frac{\sin(\phi)}{3 \cdot \omega} = -\frac{\operatorname{tg}(\phi)}{3 \cdot \omega \cdot \sqrt{1 + [\operatorname{tg}(\phi)]^2}}$$ → weiter selber auswerten.

Hinweis zur Dimensionskontrolle: Die Koeffizienten in der DGL haben die Dimensionen

bei $\ddot{y}_p \rightarrow \quad 1[s^2]$

bei $\dot{y}_p \rightarrow \quad 3[s]$

bei $y_p \rightarrow \quad 2[\text{dimensionslos}]$.

Immer Dimensionskontrollen machen! Wenn diese nicht stimmen, liegen auf jeden Fall Fehler vor.

Aber: Die Folgerung

„wenn die Diemensionskontrolle richtig ist, stimmt auch das Ergebnis“

ist leider **falsch**!