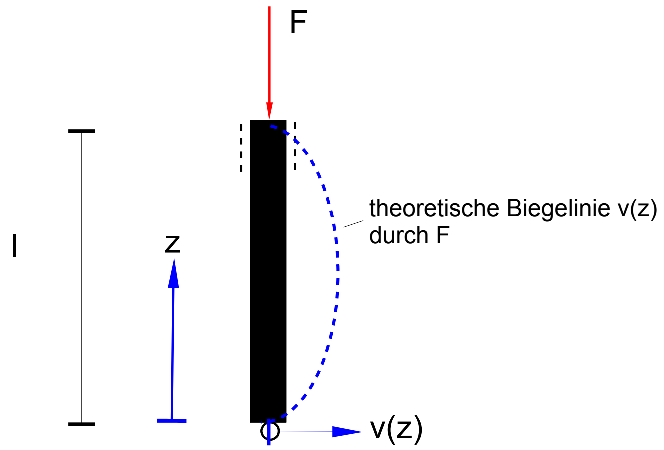
Mathematik II - Übungsblatt 07

Aufgabe 1



Eine der vielen Aufgabenstellungen der technischen Mechanik ist die Bestimmung von Knickkräften, also derjenigen Kräfte, bei denen z. B. ein axial mit einer Kraft F belasteter Stab sich so stark durchbiegt, dass er knickt. Um diesen Fall zu vermeiden, muss der Wert der Knickkraft bekannt sein. Die Maschinenbauingenieure stellen dazu die DGL für die Biegelinie des Balkens bei axialer Belastung auf und betrachten die Besonderheit der Lösung. Die Durchbiegung v=v(z) in horizontaler Richtung und damit senkrecht zur axial zum Stab orientierten z-Achse unterliegt dabei der DGL

$$v'' + \frac{F}{E I_T} \cdot v = -\frac{F}{E I_T} \cdot \frac{a}{l} \cdot z \quad .$$

Dies ist eine gewöhnliche (im Gegensatz zu „partiell“, wo die Differentialquotienten partieller Natur sind) lineare, inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten. Es bedeuten:

- E: Elastizitätsmodul, eine Materialeigenschaft des Stabes
- I_T : Flächenträgheitsmoment, abhängig von der Querschnittsform
- l: Stablänge
- a außeraxialer Versatz der Wirkungslinie von F gegen die ideale Stabachse.

Der Versatz a ist ein kleiner, angenommener Wert, für den bei realen Anordnungen immer $a \neq 0$ gilt. Der tatsächliche Wert ist für die weitere Betrachtung aber ohne Bedeutung.

Für einen am unteren Ende gelenkig gelagerten Stab, der am oberen Ende durch eine Führung gegen horizontales Kippen gesichert ist, gelten die **Randbedingungen**

$$v(z=0)=0 \quad , \quad v(z=l)=0$$

Bei Aufgabenstellungen, in denen die unabhängige Variable keine Zeit- sondern eine Raumdimension hat (hier z), werden zur Bestimmung der Konstanten der homogenen Lösung statt der Anfangsbedingungen die Randbedingungen eingesetzt. Ansonsten erfolgt die Lösung der DGL wie bisher auch.

a) Geben Sie die allgemeine Lösung für v(z) an. Tipp: Verwenden Sie die Abkürzung $k = \frac{F}{E I_T}$

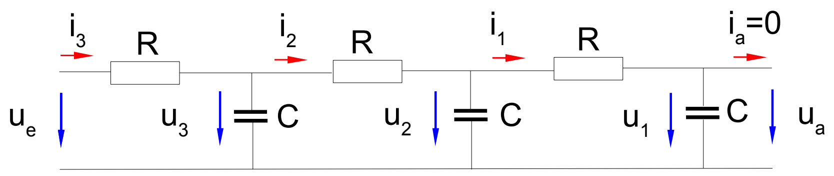
b) Bestimmen Sie die Konstanten $A_1 \text{ und } A_2$. Tipp: Diese sind komplexe Ausdrücke. Mithilfe der trigonometrischen Umformung $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ kann man sie in eine reelle Darstellung umwandeln.

c) Bestimmen Sie mit den Randbedingungen die Gesamtlösung.

d) Für bestimmte Konstellationen der Kraft F kann die Auslenkung v(z) theoretisch unendlich groß werden. Dies wäre der Knickfall, der unbedingt vermieden werden muss!. Für welche technisch sinnvolle Konstellation würde er eintreten? **Hinweis:** Hier ist die eigentliche Lösung nicht von Interesse, sondern dient nur zur Sichtbarmachung des Knickfalles.

Aufgabe 2

Ein Kettenleiter ist ein elektrisches Vierpol-Netzwerk, welches als Filter oder als näherungsweise Darstellung einer Zweidrahtleitung dienen kann. Eine einfache Anordnung mit 3 Widerständen und Kondensatoren wäre im Leerlaufbetrieb (= am Ende kein Verbraucher angeschlossen) z. B.



Wegen der 3 Kondensatoren als Energiespeicher und des Gesetzes $i_c(t) = \frac{C \cdot du_C}{dt}$ liegt als Zusammenhang zwischen Ausgangs - und Eingangsspannung $u_a = f(u_e)$ eine gewöhnliche, lineare, inhomogene DGL dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten vor.

a) Stellen Sie die DGL in der Form von 3 gekoppelten DGLs erster Ordnung für die 3 Zustandsvariablen $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $u_3 = u_3(t)$ auf. Diese Spannungen heißen deswegen auch Zustandsvariable, weil sie proportional zum Energieinhalt der elektrischen Felder in den Kondensatoren sind.

b) Beschreiben Sie die 3 DGLs in Matrix-Vektor-Form.

c) Welche Elemente haben die System-Matrix A und die Steuer-Matrix B?

d) Wie kann die gesuchte Ausgangsspannung $u_a = u_a(t)$ in Matrix-Vektor-Form hinzugefügt werden? Tipp: Matrix C bestimmen.

e) Formulieren Sie das DGL-System zur Lösung mit Hilfe von Scilab (es reicht eine Programmzeile).

Aufgabe 3

Bauen Sie in den Längszweig des Kettenleiters aus Aufgabe 2 hinter die Widerstände R zusätzlich je eine Induktivität L ein. Bei Zweidrahtleitungen berücksichtigt diese den induktiven Anteil. Dadurch werden die Ströme i_1, i_2, i_3 als Spulenströme zu weiteren 3 Zustandsvariablen. Sie sind mit den Spulenspannungen über das Gesetz $u_L(t) = L \cdot \frac{d_{iL}(t)}{dt}$ verknüpft. Man erhält eine DGL 6-ter Ordnung.

a) Stellen Sie für die Funktion $u_a = f(u_e)$ eine geeignete DGL in der Form eines Systems von 3 linearen gekoppelten DGLs erster Ordnung auf.

b) Bestimmen Sie die Matrix-Vektor-Form des vollständigen Systems.

c) Welche Elemente enthalten die Matrizen A, B und C?

d) Formulieren Sie die entsprechende Programmzeile in einem Scilab-Skript.

Aufgabe 4

Die van der Pol-DGL ist nach dem Physiker *Balthasar van der Pol* benannt, der sie 1927 im Rahmen seiner Forschungsarbeiten zu Schwingungsgeneratoren mit Vakuumröhren aufstellte. Sie ist nichtlinear von zweiter Ordnung, in der homogenen Form hat sie die Darstellung:

$$\ddot{y}(t) - \mu \cdot (1 - y(t)^2) \cdot \dot{y}(t) - y(t) = 0$$

Die Lösung y = y(t) zeigt ein vom konstanten Parameter μ und von den Anfangsbedingungen abhängiges (daher nichtlineares), merkwürdiges Schwingungsverhalten.

a) Wo tritt die Nichtlinearität in Erscheinung

b) Welche beiden Zustandsgrößen lassen sich zuordnen?

c) Was ist die Ausgangsgröße?

d) Formulieren Sie die van-der-Pol-DGL als System von zwei gekoppelten DGLs erster Ordnung. Hinweis: Die Matrix-Vektor-Schreibweise ist hier zwar möglich, aber nicht zweckmäßig.

e) Schreiben Sie das DGL-System als Programmzeile für ein Scilab-Skript.

f) (zur freiwilligen Bearbeitung!) Die Lösung lässt sich im Scilab-Skript als Zeitdiagramm mit dem Befehl ***plot(t, y(1,:))*** zeichnen. Sehr aufschlussreich ist aber auch die Darstellung der beiden Zustandsvariablen y und $\dot{y}$ gegeneinander mit ***plot(y(1,:),y(2,:))***. Diese Form ist den Lissajou-Figuren am Oszillografen verwandt. Wählen Sie als Zeitbereich $0 \leq t \leq 50\,\text{s}$, als AB $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 0$ und stellen Sie die Lösung für den Parameter $\mu = 0$ und $\mu = 10$ dar (oder „spielen“ Sie mit anderen Kombinationen.

Aufgabe 5

Das dynamische Verhalten einer Radaufhängung beim Auto kann um einen um die Ruhelage gegebenen Arbeitspunkt durch zwei lineare gekoppelte DGLs je zweiter Ordnung beschrieben werden:

$$m_A \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + k \cdot y = d \cdot \dot{x} + k \cdot x$$

$$m_R \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + (k + k_R) \cdot x = d \cdot \dot{y} + k \cdot y + k_R \cdot u \quad .$$

Hierin bedeuten:

m_A:	Masse des Fahrzeugaufbaus
m_R:	Masse des Rades
x, y:	Auslenkung von Rad und Aufbau in vertikaler Richtung
u:	äußere vertikale Krafteinwirkung durch das Abrollen auf der Fahruntergrund
k_R, k:	Federkonstanten des Reifens und der Radaufhängung
d:	Dämpfungskonstante des Stoßdämpfers

Eine Aufgabe könnte es z. B. sein, die Verläufe der vertikalen Radposition x(t) und der vertikalen

Aufbauposition y(t) als Funktionen der äußeren Krafteinwirkung durch u=u(t) zu ermitteln (etwa Fahren auf einen Bordstein als sprungförmige Einwirkung).

a) Welches sind die 4 Zustandsgrößen?

b) Ordnen Sie den Zustandsgrößen die Variablen z_1, z_2, z_3 z_4 zu.

c) Stellen Sie für den Zusammenhang y = f(u) ein System von 4 DGLs erster Ordnung auf.

d) Formulieren Sie das System in Matrix-Vektor-Form.

e) Welche Elemente enthalten die Matrizen A und B?

f) Wie lassen sich die gesuchten Größen x und y aus der Matrix-Vektor-Form darstellen? Hinweis: Wie sieht die Matrix C aus?

g) Schreiben Sie das DGL-System in einer für Scilab geeigneten Form (eine Zeile genügt).

h) (freiwillig) Stellen Sie für einen Satz angenommener Parameter den Verlauf von y und x mit Hilfe der Plot-Befehle von Scilab dar, wenn u ein sprungförmige Einwirkung ist.