Mathematik I - Übungsblatt 01

Einiges zum Erinnern, falls überhaupt schon mal gesehen ….

Mengen

Aufgabe 1

Zählen Sie die Elemente auf:

a) {x : $x \in P$, x<20}, P ist die Menge aller Primzahlen.

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

b) { $x \in R: \ x^2+1=0$ }

Die quadratische Gleichung hat keine Lösungen in der Menge der reellen Zahlen, da $x_{1,2}=\pm\sqrt{-1}$ ist. Antwort also: Leere Menge {}.

Aufgabe 2

Elemente von

a) { $x|x\in N, \ |x|\leq 4$ }

Der Ausdruck $|x|$ stellt den Betrag von x dar. Für den Betrag gilt die Definition

$x\geq 0 \rightarrow |x|=+x$

$x<0 \rightarrow |x|=-x$

Der Betrag einer Zahl ist also immer entweder 0 oder eine positive Zahl. (**Nicht** verwechseln mit der Norm eines Vektors, die fälschlich oft mit Betragsstrichen angegeben wird, aber mit doppelten Betragsstrichen zu bezeichnen ist. Für den Vektor $a=[a_x \ \ a_y]$ z. B. ist die Norm der Ausdruck $\|a\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$).

Lösung hier: {0, 1, 2, 3 ,4}, da die Menge N nur 0 und positive ganze Zahlen enthält.

Zusatzfrage: Elemente von { $x|x\in Z, \ |x|\leq 4$ }?

{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}

Hinweis: Die oben angegebene Definition der Betragsfunktion gilt auch, wenn x selbst eine zusammengesetzte Funktion aus weiteren Variablen ist. Man muss dann die Fälle unterscheiden, für die die Teilvariablen insgesamt einen positiven oder negativen Ausdruck ergeben. Beispiel siehe Aufgabe 3.

b) { $x|x\in R, 2\cdot x^2-8\cdot x=0$ }

Die quadratische Gleichung hat wegen $2\cdot x^2-8\cdot x=2\cdot x\cdot(x-4)=0$ die beiden Lösungen x=0 und x=4, daher {0, 4}.

Beträge

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für alle $a\in R$, $b\in R$ die Dreiecksungleichung $|a+b|\leq|a|+|b|$ gilt.

Fall 1: $a\geq 0, \ b\geq 0$, z. B. a=5, b =3

$|a+b|=a+b \quad , \quad |a|=a \quad , \quad |b|=b \quad \rightarrow \quad a+b=a+b \quad , \quad 8=5+3$

Fall 2: $a>0,\ b<0,\ a+b\geq 0$ z. B. a = 5, b = -3

$|a+b|=a+b \quad , \quad |a|=a \quad , \quad |b|=-b \quad \rightarrow \quad a+b\leq a-b \quad , \quad 2<5+3$

Fall 3: $a<0,\ b>0,\ a+b\geq 0$ $\rightarrow$ wie Fall 2

Fall 4: $a>0,\ b<0,\ a+b<0$, z. B. a= 3, b =-5

$|a+b|=-(a+b) \quad , \quad |a|=a \quad , \quad |b|=-b \quad , \quad -(a+b)=-a-b<a-b$, -2 < 3+5

Fall 5: $a<0,\ b>0,\ a+b<0$ $\rightarrow$ wie Fall 4

Fall 6: $a<0,\ b<0,\ a+b<0$, z. B. a= -3, b= -5

$|a+b|=-(a+b) \quad , \quad |a|=-a \quad , \quad |b|=-b \quad \rightarrow \quad -(a+b)=-a-b$, -(-8) = 3+5

(ganz schön aufwändig…)

Quadratische Gleichungen

Aufgabe 4

Reelle Lösungen von

a) $-4\cdot x^2+6\cdot x-1=0$

Division durch -4: $x^2-1.5\cdot x+0.25=0$, dann pq-Formel $x^2+b\cdot x+c=0 \quad , \quad x_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$

$x_{1,2}=0.75\pm\sqrt{0.3125} \quad \rightarrow \quad x_1=0.191 \quad , \quad x_2=1.31$.

Oder „Mitternachtsformel“: $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \quad , \quad \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$

$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-16}}{-8} \quad \rightarrow \quad x_1=0.191 \quad , \quad x_2=1.31$

b) $x^2-10\cdot x=74 \quad \rightarrow \quad x_{1,2}=5\pm\sqrt{25+74} \quad , \quad x_1=-4.95 \quad , \quad x_2=14.95$

Ungleichungen

Aufgabe 5

Gesucht sind die reellen Wertebereiche von

a) $x^2+x+1\geq 0$.

Man bestimmt zunächst die reellen Nullstellen der quadratischen Gleichung. Falls diese existieren, liegt die Lösung entweder dazwischen oder außerhalb.

Hier gibt es keine reelle Lösungen der quadratischen Gleichung, sie hat immer Wert einen positiven Wert, daher ist der Wertebereich $x \in R$.

b) $\frac{1+x}{1-x} > 1$.

Regeln zur Bearbeitung von Ungleichungen:

- Addition derselben Zahl auf beiden Seiten ändert die Relation nicht.
- Multiplikation beider Seiten mit einer positiven Zahl ändert die Relation nicht.
- Multiplikation beider Seiten mit einer negativen Zahl kehrt die Relation um.

Man kann die Ungleichung durch Multiplikation mit $(1-x)$ umformen. Für $1-x>0 \rightarrow x<1$ gilt

$1+x>1-x \rightarrow 2 \cdot x>0 \rightarrow x>0$

Demnach muss sowohl $x>0$ als auch $x<1$ sein, dies wird durch $0<x<1$ erfüllt.

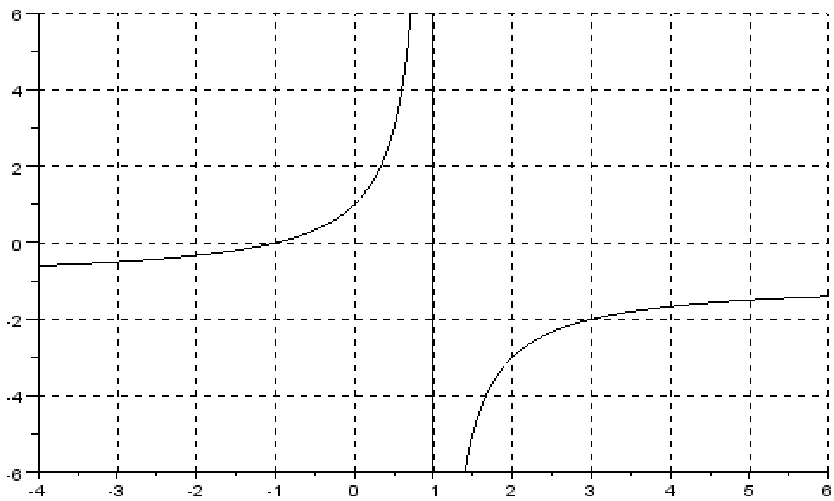
Einen guten Überblick erhält man durch die graphische Darstellung der Funktion

$f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

Hierzu erweist sich **Scilab** als „Taschenrechner" nützlich. In der **Scilab Console** gibt man nach dem Prompt " **-->**" ein:

```
clf;
x=linspace(-4,6,2000)';
plot2d(x, (1+x)./(1-x),rect=[-4,-6,6,6]);
xgrid;
```

und betätigt die Eingabetaste. Man erhält unter der Bezeichnung „Grafik-Fenster Nummer 0" das Diagramm

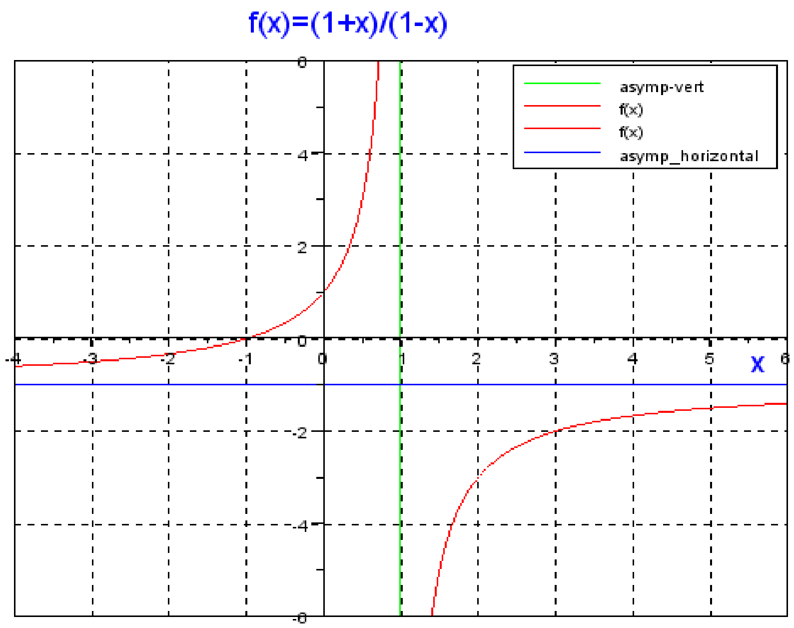


Es enthält zwar bereits Wesentliches, ist aber **nicht** vollständig. Damit ein externer Betrachter verstehen kann, was es darstellt, muss wenigstens eine aussagekräftige Beschriftung hinzugefügt werden.

Immer - und ab jetzt niemals anders: Ein Diagramm enthält außer dem (oder den) Graphen wenigstens eine Skalierung der Achsen und eine Achsenbeschriftung.

Mit etwas mehr Aufwand lässt sich ein sowohl vollständiges als auch übersichtliches Diagramm herstellen, hier als Skript in der Darstellung als **SciNotes** mit Zeilennummerierung:

```
clf;
xmin=-4;
xmax=6;
ymin=-6;
ymax=6;
x1=linspace(xmin,1-0.09,1000)';
x2=linspace(1+0.09,xmax,1000)';
x=linspace(xmin,xmax,1000)';
plot2d([1,1],[ymin,ymax],[3]);
plot2d([x1, x2,x], [(1+x1)./(1-x1),(1+x2)./(1-x2),0*x-1],
[5,5,2],frameflag=1, rect=[xmin, ymin, xmax,ymax], axesflag=5;
xlabel('x', 'fontsize', 4, 'color','b','position',[5.5,-0.8]);
title('f(x)=(1+x)/(1-x)', 'fontsize', 4,'color','b',
'position',[-1,6.5]);
legend('asymp-vert','f(x)','f(x)','asymp_horizontal');
xgrid(1);
```



Hieraus lässt sich ablesen, dass $0<x<1$ der Lösungsbereich ist, nur hier liegt der linke Ast oberhalb von 1.

c) $\frac{x-1}{x+1}<1$

Umformung durch Multiplikation beider Seiten mit $(x+1)>0 \rightarrow x>-1$ ergibt

$x-1<x+1 \rightarrow 0<2$.

Diese Aussage ist richtig, also gilt $x>-1$.

Nun muss noch der restliche Bereich für x untersucht werden. Bei Multiplikation mit $x+1<0 \rightarrow x<-1$

ändert sich die Relation der Ungleichung:

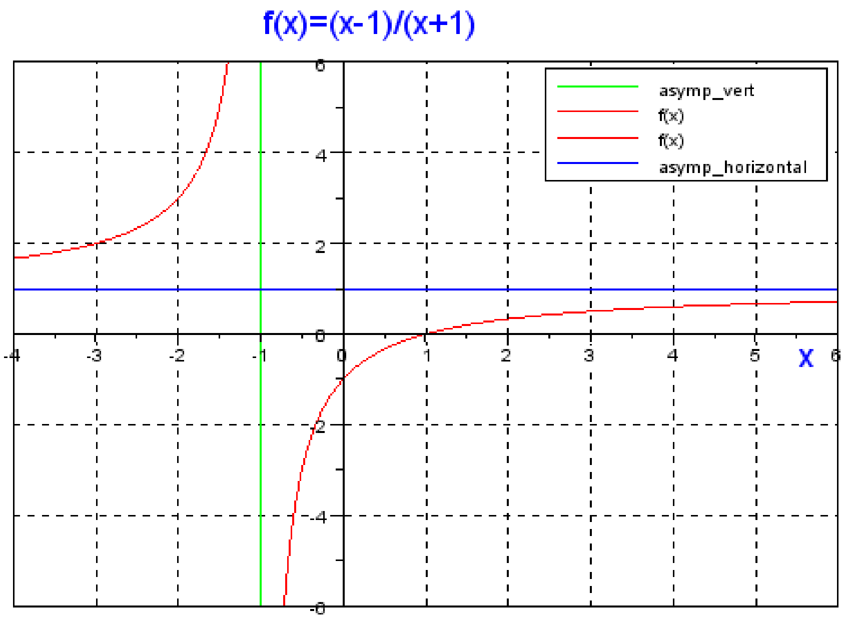
$x-1>x+1 \rightarrow 0>2$.

Diese Aussage ist widersprüchlich, für $x<-1$ existiert daher keine Lösung, Gesamtlösung also $x>-1$.

Bei Ausführung des Scilab-Skriptes

```
clf;
xmin=-4;
xmax=6;
ymin=-6;
ymax=6;
x1=linspace(xmin,-1-0.09,1000)';
x2=linspace(-1+0.09,xmax,1000)';
x=linspace(xmin,xmax,1000)';
plot2d([-1,-1],[ymin,ymax],[3]);
plot2d([x1, x2,x], [(x1-1)./(x1+1),(x2-1)./(x2+1),0*x+1],
[5,5,2],frameflag=1, rect=[xmin, ymin, xmax,ymax],axesflag=5;
xlabel('x', 'fontsize', 4, 'color','b','position',[5.5,-0.8]);
title('f(x)=(x-1)/(x+1)', 'fontsize', 4,'color','b',
'position',[-1,6.5]);
legend('asymp_vert','f(x)','f(x)','asymp_horizontal');
xgrid(1);
a=gca();
a.x_location = "origin";
a.y_location = "origin";
```

erhält man



und findet das Ergebnis bestätigt (der rechte Ast liegt unterhalb von 1).

Operationen an Brüchen

Aufgabe 6

a) Bringen Sie den Ausdruck $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$ auf einen Nenner.

Regeln:

- Brüche dürfen nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie den gleichen Nenner aufweisen.
- Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn er in Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert oder dividiert wird (**außer mit 0 !**).

Man kann zunächst also den linken und rechten Bruch addieren (Vorzeichen beachten):

$$\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}=-\frac{2}{a+1}+\frac{4}{3a+2}$$

Nun erweitert man den linken Bruch mit $(3a+2)$, den Rechten mit $(a+1)$:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}=-\frac{2}{a+1}+\frac{4}{3a+2}=-\frac{2\cdot(3a+2)}{(a+1)\cdot(3a+2)}+\frac{4\cdot(a+1)}{(3a+2)\cdot(a+1)} \quad .$$

Die Nenner sind gleich, die Brüche können zu einem Bruch zusammengefügt werden:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}=-\frac{2\cdot(3a+2)}{(a+1)\cdot(3a+2)}+\frac{4\cdot(a+1)}{(3a+2)\cdot(a+1)}=\frac{-2\cdot(3a+2)+4\cdot(a+1)}{(a+1)\cdot(3a+2)}=-\frac{2a}{3a^2+5a+2} \quad .$$

a) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$.

Regeln:

- Zähler und Nenner des Gesamtbruches jeweils für sich zu einem Bruch zusammenziehen.
- Zähler des Gesamtbruches mit dem Kehrwert des Nenners multiplizieren.

$$\dfrac{\frac{a^2+b^2}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{ab}}=\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$, gilt aber nur für $a,b\neq 0$ und $|a|\neq|b|$! Warum?