Mathematik I - Übungsblatt 02
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist, also nicht durch einen Bruch dargestellt werden kann.

- **Annahme:** $\sqrt{3}$ ist eine rationale Zahl $\sqrt{3}=\frac{m}{n}$. Der Bruch soll bereits gekürzt sein, Zähler und Nenner enthalten also keine gemeinsamen ganzzahligen Faktoren. Quadrieren ergibt $3 \cdot n^2 = m^2$.
- Eine ganze Zahl ist entweder eine Primzahl oder sie lässt sich in ein **eindeutiges** Produkt von Primzahlen oder deren Vielfachen zerlegen, $m = p_1^q \cdot p_2^r \cdot \ldots \cdot p_n^t$, mit $q, r, \ldots, t \in N$.
- m^2 besteht dann aus einem Produkt von Primzahlen mit **geradem** Exponenten. Damit gilt dies wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung auch für die linke Seite in $3 \cdot n^2 = m^2$. Da die linke Seite bereits den Faktor 3 mit dem **ungeraden** Exponenten 1 enthält, muss n^2 ebenfalls einen Faktor 3 mit einem **ungeraden** Exponenten aufweisen.
- → Widerspruch → $\sqrt{3}$ lässt sich nicht durch eine rationale Zahl darstellen.

Dieser Beweis nach dem Widerspruchsverfahren gilt für alle $\sqrt{k}$, $k \in N$, $k \neq a^2$, $a \in N$, also für alle Radikanden (= Operanden unter der Wurzel) , welche nicht selbst das Quadrat einer natürlichen Zahl sind. Warum?

Tipp: Ab jetzt Taschenrechner oder **Scilab** einsetzen!

Aufgabe 2 (Kapitel 3.4 im Skript)

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) von

a) 316 und 256? $316 = 2^2 \cdot 79$, $256 = 2^8$, $\text{kgV}(316,256) = 2^8 \cdot 256 = 20224$

b) 1029 und 504? $1029 = 3 \cdot 7^3$, $504 = 2^3 \cdot 312 \cdot 7$, $\text{kgV}(1029, 504) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^3 = 12348$

c) 235 und 1269? → selbst ausrechnen!

Primfaktorenzerlegung mit Scilab-Funktion ***factor(x)*** machen!

Aufgabe 3 (Kapitel 3.4 im Skript)

Größter gemeinsamer Teiler (ggT) von

a) 37 und 23? 37 ist Primzahl, 23 ist Primzahl → $\text{ggT}(37,23) = 1$

b) 105 und 77? $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $77 = 7 \cdot 11$ → $\text{ggT}(105, 77) = 7$

c) 256 und 288? $256 = 2^8$, $288 = 2^5 \cdot 3^2$ → $\text{ggT}(256,288) = 2^5 = 32$

Primfaktorenzerlegung mit Scilab-Funktion ***factor(x)***.

Hinweis: Man kann auch den Euklidischen Algorithmus verwenden, siehe Hilfsblatt EA.pdf. Z. B. Für a) :

Φ_0	=	a_1	$\cdot$	Φ_1	+	Φ_2
37		**1**		**23**		**14**

Φ_1	=	a_2	$\cdot$	Φ_2	+	Φ_3
23		**1**		**14**		**9**

Φ_2	=	a_3	$\cdot$	Φ_3	+	Φ_4
14		**1**		**9**		**5**

Φ_3	=	a_4	$\cdot$	Φ_4	+	Φ_5
9		**1**		**5**		**4**

Φ_4	=	a_5	$\cdot$	Φ_5	+	Φ_6	
5		**1**		**4**		**1**	$= \mathrm{ggT}(\Phi_0, \Phi_1) = \mathrm{ggT}(\Phi(n), e)$

Φ_5	=	a_6	$\cdot$	Φ_6	+	Φ_7	
4		**4**		**1**		**0**	$\rightarrow$ der EA endet immer mit „0“

Aufgabe 4 (Kapitel 2 und 18.9 im Skript)

a) Bestimmen Sie die modulare inverse Zahl x zu 5 bezüglich 7, also mit der Eigenschaft $(x \cdot 5)\ \mathrm{MOD}\ 7 = 1$. Hinweis: Stellen Sie eine Produkttabelle auf, oder verwenden Sie den Euklidischen Algorithmus und seine Umkehrung (siehe Hilfsblatt).

Produkttabelle: Sie gibt die Produkte von Spaltenzelle x Zeilenzelle MOD 7 an:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Die modulare inverse Zahl zu 5 bezüglich des Moduls 7 ist 3, da $(3 \cdot 5)\ \mathrm{MOD}\ 7 = 1$.

Die anderen modularen Inversen:

zu 1 $\rightarrow$ 1

zu 2 $\rightarrow$ 4

zu 3 $\rightarrow$ 5

zu 4 $\rightarrow$ 2

zu 6 $\rightarrow$ 6

b) Bestimmen Sie die modulare inverse Zahl x zu 21 bezüglich 57.

Hier wird eine Produkttabelle sehr aufwändig . Bei größeren Modulen (ab ca. MOD 10) führt der Euklidische Algorithmus und seine Umkehrung besser zum Ziel.

Aber: Modulare inverse Zahlen existieren nur dann, wenn ihr ggT = 1 ist. Da $\mathrm{ggT}(57,\ 21)=3$, existiert für dieses Zahlenpaar kein modulares Inverses. Überprüfen Sie dies mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung oder mit dem EA.

c) Bestimmen Sie die modulare inverse Zahl x zu 34 bezüglich 63.

Φ_{i-1}	=	a_i	·	Φ_i	+	Φ_{i+1}
Φ_0	=	a_1	·	Φ_1	+	Φ_2
63	=	**1**	·	**34**	+	**29**
Φ_1	=	a_2	·	Φ_2	+	Φ_3
34	=	**1**	·	**29**	+	**5**
Φ_2	=	a_3	·	Φ_3	+	Φ_4
29	=	**5**	·	**5**	+	**4**
Φ_3	=	a_4	·	Φ_4	+	Φ_5
5	=	**1**	·	**4**	+	**1**

$\mathbf{1} = \mathrm{ggT}(\Phi_0,\Phi_1) = \mathrm{ggT}(\Phi(n),e)$

m = 5 = Index von l

Rekursion:

$z_i = -a_{m-i} \cdot z_{i-1} +$

mit i = 2, 3, …, m-1 =

Startwerte:

$z_0 = 1$

$z_1 = -a_{m-1} = -a_4 =$

Durchführung der Rekursi

z_i	=	$-a_{m-i}$	·	z_{i-1}	+
z_2	=	$-a_3$	·	z_1	+
6	=	**-5**	·	**-1**	
z_3	=	$-a_2$	·	z_2	+
-7	=	**-1**	·	**6**	
z_4	=	$-a_1$	·	z_3	+
13	=	**-1**	·	**-7**	

z_4 ist die gesuchte modulare inverse Zahl

Probe: $(13 \cdot 34)\ \mathrm{MOD}\ 63 = 1$

Aufgabe 5 (Kapitel 2.1)

Wandeln Sie

a) 2075_{10} in eine Zahl der Basis B=13

Im 13-er – System gibt es die13 Ziffernsymbole 0, 1, 2, …, 9, A, B, C

2075	:	13	=	159	+	8
159	:	13	=	12	+	3
12	:	13	=	0	+	12

$2075_{10} = C \cdot B^2 + 3 \cdot B + 8 \cdot B^0 = C38_{13}$

b) 213_{20} in eine Dezimalzahl

Die Basis ist B = 20.

$2 \cdot B^2 + 1 \cdot B^1 + 3 \cdot B^0 = 2 \cdot 20^2 + 1 \cdot 20 + 3 = 800 + 20 + 3 = 823_{10}$

c) 463_9 in je eine Binär-, Oktal-, Dezimal- und Hexadezimal-Zahl. **Hinweis:** Wählen Sie diejenigen Reihenfolge mit dem geringsten Gesamtaufwand.

- $463_9 = 4 \cdot B^2 + 6 \cdot B^1 + 3 \cdot B^0 = 4 \cdot 81 + 6 \cdot 9 + 3 = 381_{10}$
- $381_{10} = 101111101_2$ (Scilab: ***dec2bin(381)***)
- Zerlegung in Triaden (= Dreiergruppen), da eine Triade im Binärsystem einer Ziffer im Oktalsystem entspricht:

  $101\ \ 111\ \ 101_2 = 575_8$ (oder Scilab: ***dec2oct(381)***)
- Zerlegung in Tetraden (= Vierergruppen), da eine Tetrade im Binärsystem einer Ziffer im Hexadezimalsystem entspricht:

  $1\ \ 0111\ \ 1101_2 = 17D_{16}$ (oder Scilab: ***dec2hex(381)***)

Aufgabe 6 (Kapitel 2.1)

a) Stellen Sie 73.23_{10} als Binärzahl dar.

Ganzzahl-Anteil als Binärzahl: $73_{10} = 1001001_2$

Gebrochener Anteil als Binärzahl:

$0.23_{10} \cdot 2 = 0.46_{10}$

$0.46_{10} \cdot 2 = 0.92_{10}$

$0.92 \cdot 2 = 1.84_{10}$ → hier beginnt die Periode, siehe unten

$0.84_{10} \cdot 2 = 1.68_{10}$

$0.68_{10} \cdot 2 = 1.36_{10}$

$0.36_{10} \cdot 2 = 0.72_{10}$

$0.72_{10} \cdot 2 = 1.44_{10}$

$0.44_{10} \cdot 2 = 0.88$

$0.88_{10} \cdot 2 = 1.76_{10}$

$0.76_{10} \cdot 2 = 1.52_{10}$

$0.52_{10} \cdot 2 = 1.04_{10}$

$0.04_{10} \cdot 2 = 0.08_{10}$

$0.16_{10} \cdot 2 = 0.32_{10}$

$0.32_{10} \cdot 2 = 0.64_{10}$

$0.64_{10} \cdot 2 = 1.28_{10}$

$0.28_{10} \cdot 2 = 0.56_{10}$

$0.56_{10} \cdot 2 = 1.12_{10}$

$0.12 \cdot 2 = 0.24_{10}$

$0.24_{10} \cdot 2 = 0.48_{10}$

$0.48_{10} \cdot 2 = 0.96_{10}$

$0.96_{10} \cdot 2 = 1.92_{10}$

$0.92_{10} \cdot 2 = 1.84_{10}$ … ab jetzt periodisch, da 0.92 bereits in der dritten Zeile erschien.

Die Vorkommastellen der rechten Seiten ergeben von oben nach unten gelesen die Binärstellen des Nachkomma-Anteils:

$0.23_{10} = 00\overline{11101011100001010001}1...._2$.

Damit:

$73.23_{10} = 1001001.00\overline{11101011100001010001}1...._2$

b) Welcher Darstellung als rationale Zahl mit Zähler und Nenner entspricht $2.\overline{2}_{10}$?

$x = 2.\overline{2}$

$10 \cdot x = 22.\overline{2}$

$10 \cdot x - x = 9 \cdot x = 20.0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{20}{9}$

Probe mit Scilab: Eingeben und Ausführen von z. B.

format(10); 20/9

c) Welcher Darstellung als rationale Zahl entspricht $3.\overline{285714}_{10}$?

$x = 3.\overline{285714}$

$1000000 \cdot x = 3285714.\overline{285714}$

$1000000 \cdot x - x = 999999 \cdot x = 3285711$

$$x = \frac{3285711}{999999} = \frac{3^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 37}{312 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} = \frac{23}{7}$$

Probe mit Scilab: Eingeben und Ausführen von z. B.

format(18); 23/7