Mathematik I - Übungsblatt 03
mit Lösungen

Aufgabe 1

a) Addieren Sie 75_{10} und 143_{10} in Binärdarstellung . (selbst rechnen)

b) Bilden Sie das Zweierkomplement (= ZK) zu 87_{10} in Binärdarstellung.

$87_{10}=101\ 0111_2$ → Einerkomplement $EK=010\ 1000$ → ZK = EK+1 $ZK=010\ 1001$

Vorsicht: Wenn das ZK für die Addition zu einer Binärzahl mit 8 Stellen benötigt wird (Aufgabe d), muss das EK von der eventuell links mit 0 auf 8 Stellen ergänzten Zahl gebildet werden:

$87_{10}=0101\ 0111_2 \rightarrow EK=1010\ 1000 \rightarrow ZK=1010\ 1001$

c) Bilden Sie das ZK zu 223_{10} in Binärdarstellung.

$223_{10}=1101\ 1111_2 \rightarrow EK=0010\ 0000 \rightarrow ZK=0010\,0001$

d) Subtrahieren Sie 87_{10} von 223_{10} in Binärdarstellung mit Hilfe des Zweierkomplement-Verfahrens.

Beachten: Wenn der Betrag des **Minuenden** (= „der abgezogen wird“, hier 87_{10}) kleiner ist als der Betrag des **Subtrahenden** (="von dem abgezogen wird“, hier 143_{10}), müssen **vor** der Zweierkomplement-Bildung soviel führende Nullen aufgefüllt werden, dass die Stellenzahl des Subtrahenden erreicht wird.

$$\begin{array}{r} 1101\ 1111 \\ +1010\ 1001 \\ \hline 1\ 1000\ 1000 \end{array}$$

$1000\ 1000 \rightarrow 136_{10}$

e) Subtrahieren Sie 223_{10} von 87_{10} in Binärdarstellung mit Hilfe des Zweierkomplement-Verfahrens.

Beachten: Das Ergebnis der ZK-Addition enthält in diesem Fall (→ Betrag Minuend größer als Betrag Subtrahend) keinen Übertrag. Dies ist das Indiz für ein negatives Ergebnis, das nun durch ZK-Bildung wieder rückgeführt werden muss. Dabei sind führende Nullen bei der ZK-Bildung einzubeziehen, sonst wird das Endergebnis falsch.

$$\begin{array}{r} 0101\ 0111 \\ +0010\ 0001 \\ \hline 0111\ 1000 \end{array}$$

$0111\ 1000 \rightarrow \text{kein Übertrag}$

$$\begin{array}{r} 1000\ 0111 \\ +0000\ 0001 \\ \hline 1000\ 1000 \end{array} \rightarrow 136_{10}$$

f) Multiplizieren Sie 117_{10} und 201_{10} in Binärdarstellung.

Tipp: Verwenden Sie **Scilab** zur Zahlenkonvertierung: ***dec2bin(x)***, ***bin2dec(y)***, dabei beachten, dass x als Dezimalzahl, y aber als Zeichenkette der Ziffernfolge einzugeben ist, also z. B. y = '101110'.

Aufgabe 2

Bringen Sie auf einen Nenner und in nicht mehr kürzbare Form.

a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

Die 3 Nenner lassen sich wie folgt zerlegen:

$2a^2+2ab=2a\cdot(a+b)$, $2a^2b+2ab^2=2ab\cdot(a+b)$, $4ab+4b^2=4b\cdot(a+b)$

kgV(Nenner): $2\cdot 2a\cdot b\cdot(a+b)$.

$\frac{6ab+2b^2-2a^2-2b^2+2a^2-5ab}{4ab\cdot(a+b)} \rightarrow \frac{1}{4\cdot(a+b)}$,mit $a,b\neq o$ und $a\neq -b$

b) $\frac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}} = \frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-2ab-b^2}$ mit $|a|\neq|b|$ und $|a|\neq 1\pm 2\sqrt{b}$

c) $\frac{3a^{n+1}\cdot 6x^{n+7}\cdot 9b^{x+1}}{3x^n\cdot 2b^{x+1}\cdot 3a} = 9\cdot\left(a^n\cdot x^7\right)$

d) $2\cdot\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\frac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

Vorsicht: Dies ist ein Ausdruck, **keine** Gleichung. Man darf also nicht alles mit dem Nenner multiplizieren, um ihn zu „beseitigen“. Der Ausdruck bleibt bei Veränderungen der Darstellung ein Bruch.

Man bringt ihn auf den gleichen Nenner:

$$2\cdot\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\frac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}} = \frac{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}\cdot\sqrt{2x^2-2kx+k^2}-(2x-x)^2\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$$

$$= \frac{k^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$$

e) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}} = 3\cdot(x-1)$

f) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}}:\frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}} = \frac{162}{8}\cdot\frac{x^{4a-3}}{y}$

Aufgabe 3

a) Geben Sie die Werte der Binomialkoeffizienten $\binom{6}{3}$ und $\binom{15}{5}$ an.

$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot(6-3)!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=20$, $\binom{15}{5}$ → selbst berechnen.

Hinweis: Verwenden Sie zur Kontrolle folgende, selbst zu erstellende **Scilab-Funktion**:

```
function y=binom(n,m)
    y=factorial(n)/(factorial(m)*factorial(n-m));
endfunction
```

b) Multiplizieren Sie das Binom $(a-b)^4$ zu einer Summendarstellung

1. in Langform

$$(a-b)^4 = a^4 - \binom{4}{3} \cdot a^3 b + \binom{4}{2} \cdot a^2 b^2 - \binom{4}{3} a b^3 + \binom{4}{4} b^4$$

2. in der kürzestmöglichen Kompaktform (mit den Kompaktformen für Summen, Binomialkoeffizienten und alternierende Vorzeichen)

$$(a-b)^4 = \sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i \cdot \binom{4}{4-i} \cdot a^{4-i} \cdot b^i$$

c) Wie viele Kombinationen gibt es für die Auswahl von 4 Personen aus einer Gruppe von 12 Personen?

$$\binom{12}{4}$$

d) Wie viele Binärmuster kann man mit 10 Stellen erzeugen.

$$2^{10} = 1024$$

e) Wie viele Muster kann man mit 10 Stellen bei 5 verschiedenen Elementen r, s, t, u, v erzeugen?

Aufgabe 4

a) Gegeben sind alle Nullstellen $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2,\ x_5 = -1$ eines Polynoms. Geben Sie das Polynom

1. in Produktform (lang und kompakt)

$$f(x) = (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+1) = \prod_{i=1}^{i=5} (x - x_i)$$

2. in Summenform (lang und kompakt) an. Tipp: Wurzelsatz von Vieta verwenden.

$$f(x) = x^5 - 1 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4 = \sum_{i=0}^{5} a_{n-i} \cdot x^{(n-i)} \quad \text{Mit}$$

$$a_5 = 1$$

$$a_4 = (-1)^{(5-4)} \cdot \sum_{i=1}^{i=5} x_i$$

$$a_3 = (-1)^{(5-3)} \cdot \sum_{i=1,\, j=1,\, j>i}^{i=5,\, j=5} x_i \cdot x_j$$

$$a_2 = (-1)^{(5-2)} \cdot \sum_{i=1,\, j=1,\, k=1,\, j>i,\, k>j}^{i=5,\, j=5,\, k=5} x_i \cdot x_j \cdot x_k$$

$$a_1 = (-1)^{(5-1)} \cdot \sum_{i=1,\, j=1,\, k=1,\, l=1\, j>i,\, k>j,\, l>k}^{i=5,\, j=5,\, k=5,\, l=5} x_i \cdot x_j \cdot x_k \cdot x_l$$

$$a_0 = (-1)^5 \cdot (x_2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5)$$

Tipp: Mit **scilab** Probe machen: ***roots([1, -1, -5, 5 ,4 ,-4])*** und mit den angegebenen Nullstellen vergleichen.

Noch ein Tipp: Wenn man die Nullstellen als Vektor schreibt, also

nst =[1, -2, 1, 2 ,-1], dann lassen sich die Koeffizienten mit ***poly(nst,“x“)*** bestimmen. Die Reihenfolge beginnt allerdings bei a_0 !

b) Mit welcher Funktion lässt sich bei Punkt „2." die Anzahl möglicher Kombinationen von m aus n Elementen angeben?

Mit $\binom{5}{i}$.

Aufgabe 5

Stellen Sie den gebrochen rationalen Polynomausdruck

$$f(x)=\frac{(x^2+2x-8)\cdot(x-1)^3}{(x+2)^2}$$

als Summe aus einem reinen Polynom (also mit Nennerpolynom „1") und einem echten rationalen Polynomausdruck mit Zählergrad < Nennergrad dar. **Tipp:** Zähler und Nenner in Summenform schreiben und Polynomdivison anwenden.

Nullstellen von $x^2+2x-8 \quad\rightarrow\quad x_1=2 \quad , \quad x_2=-4$

Tipp: ***poly(...)*** verwenden.

$$f(x)=\frac{x^5-x^4-11x^3+29x^2-26x+8}{x^2+4x+4}$$

Hinweis: Die Probe mit ***roots(...)*** ergibt neben 2 und – 4 auch ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar mit sehr kleinem Imaginärteil und einen nahe bei 1 liegenden Wert 0.999956. Dies ist die Folge numerischer Ungenauigkeiten bei Ausführung von ***roots***.

Die Polynomdivision ergibt

$$f(x)=x^3-5\cdot x^2+5\cdot x+29+\frac{-162\cdot x-108}{x^2+4x+4}$$

Tipp: Kontrolle mit Hilfe von **scilab**: Bestimmen Sie mit mit ***poly(...)*** das Zählerpolynom ***pz*** und das Nennerpolynom ***pn*** und wenden Sie die Funktion ***[P,Q] = pdiv(pz,pn)*** an.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie zu f(x) aus Aufgabe 5 alle Nullstellen und Polstellen. (Siehe daselbst)

Falls es keine übereinstimmenden Null- und Polstellen gibt, bestimmen Sie

b) alle vertikalen Asymptoten → Zweifache Asymptote bei $x=-2$

c) die Asymptote für $x\rightarrow\pm\infty \quad\rightarrow\quad f(x)=x^3-5\cdot x^2+5\cdot x+29$.

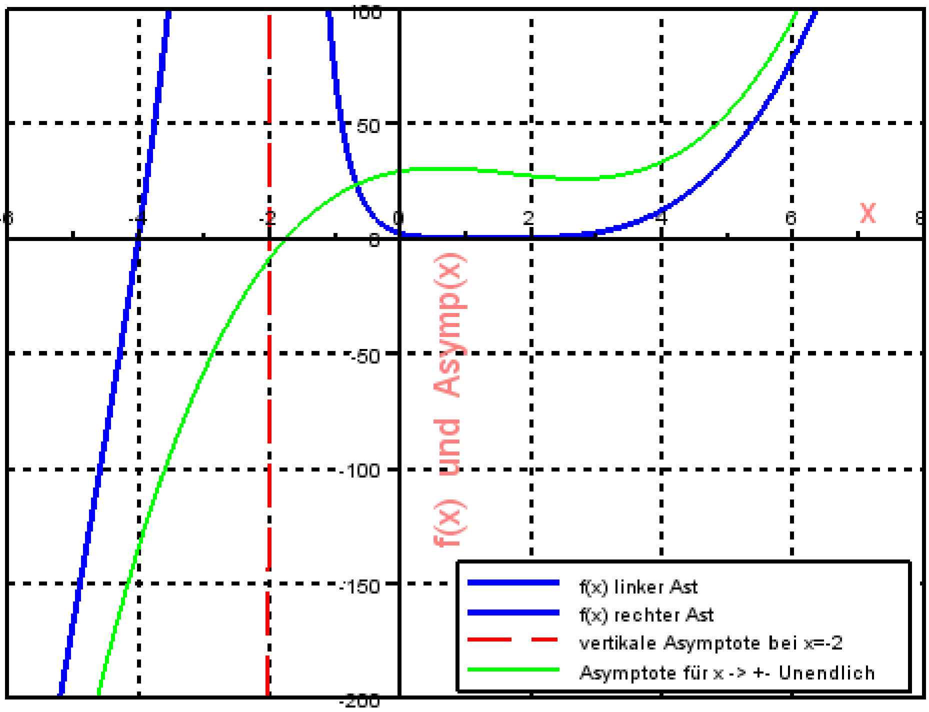
Skizzieren Sie den Graphen zu f(x) grob von Hand und kontrollieren Sie das Ergebnis mit Hilfe der Scilab-Funktion ***plot*** oder ***plot2d*** .

Verwenden Sie zur Kontrolle folgendes **Scilab-Skript:**

```
clf;
xmin=-6;
xmax=8;
ymin=-200;
ymax=100;
x=linspace(xmin,xmax,2400)';
x1=linspace(xmin,-2-0.01,1200); // für linken Ast
x2=linspace(-2+0.01,xmax,1200); // für rechten Ast
drawlater();
plot(x1,(x1^5 -x1^4 -11*x1^3 + 29*x1^2 - 26*x1 +8)./(x1^2 +4*x1 +4),"b",x2,(x2^5-x2^4 -11*x2^3
+ 29*x2^2 - 26*x2 +8)./(x2^2 +4 *x2 +4),"b",x,10000*(x+2),"r--",x, x^3-5*x^2 +5*x+29,"g");
xlabel('x', 'fontsize', 4,'color',[1,0.5,0.5], 'position',[7,5]);
```

```
ylabel('f(x)  und  Asymp(x)', 'fontsize', 4, 'color',[1,0.5,0.5], 'position',[1,-135]);
xgrid;
a=gca();
a.data_bounds=[xmin,xmax,ymin,ymax];
a.x_location="origin";
a.y_location="origin";
a.thickness=1.5;
//a.isoview="on";
e=gce();
e.children(4).thickness=3.2;
e.children(3).thickness=3.2;
e.children(2).thickness=2;
e.children(1).thickness=2;
hl=legend(['f(x) linker Ast';'f(x) rechter Ast';'vertikale Asymptote bei x=-2'; 'Asymptote für
x -> +- Unendlich'],4);
drawnow();
```

Damit wird folgendes Diagramm erzeugt:



Man erkennt u. a., dass sich die Asymptote für $x \to \pm\infty$ dem linken und rechten Ast von f(x) nähert.