Mathematik I - Übungsblatt 05

Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden Spaltenvektoren im x-y-Koordinatensystem $a=[1,-2]^T$ und $b=[-3,1]^T$.

a) Skizzieren Sie a und b im x-y-Koordinatensystem. Dabei auf Vollständige Beschriftung achten:
   - Achsenskalierung
   - Achsenbeschriftung
   - Was wird dargestellt?

b) Berechnen Sie die Normen und die Winkel mit der positiven x-Achse.

c) Welchen Winkel schließen a und b ein (den kleineren angeben)?

d) Berechnen Sie aus den Ergebnissen zu Punkt a) die Komponenten der Vektoren a und b. Vergleich mit den Vorgaben?

e) Bilden Sie das Skalarprodukt $c=a.b$.

f) Bestimmen Sie mit dem Skalarprodukt c aus Punkt e) den Winkel zwischen den Vektoren a und b. Vergleich mit Ergebnis aus Punkt b)?

Tipp: Verwenden Sie zur Kontrolle folgende Scilab-Funktionen, bzw. Befehlsfolgen:

- Zur Eingabe der Vektoren: ***a= [1,-2]'*** usw.
- Für die Skizze (entweder als Befehlsfolge in der Scilab-Konsole eingeben oder mit **SciNotes** als komplettes Programm-Skript schreiben. Letzteres ist **viel** günstiger, da es nach Speichern immer wieder zur Verfügung steht und sich außerdem leicht ändern und anpassen lässt):

```
clf;
plot2d([0,a(1)],[0,a(2)]);
plot2d([0,b(1)],[0,b(2)]);
xgrid;
ah=gca();
ah.x_location="origin";ah.y_location="origin"; xlabel('x','fontsize',4);ylabel('y','fontsize',4);
title('Vektoren','fontsize',4);
```

- Für die Normen: ***norm(a)*** usw.
- Für die Winkel: ***atand(a(2)/a(1))***, usw.
- Für das Skalarprodukt: ***c= sum(a.*b)***
- Für den Winkel: ***phi = acosd(c/(norm(a)*norm(b)))***

Aufgabe 2

Gegeben sind die beiden Vektoren $u=[1,-1,\ 2,-2,\ 3]$ und $v=[3,\ 2,-3,\ 5,-1]$.

a) Länge von u?

b) Länge von v?

c) Bestimmen Sie das Skalarprodukt von u und v.

Aufgabe 3

EinHandkarren wird von einer Person auf einer ebenen Straße mit einer Kraft von 150 Newton über eine im Winkel 50° schräg zur Ebene stehende Deichsel eine Strecke von 500 Metern gezogen. Geben Sie die am Handkarren geleistete Arbeit an.

Aufgabe 4

Ein Vorgriff auf das Rechnen mit komplexen Zahlen: Die komplexen Zeigergrößen für Spannungen und Ströme der Wechselstromrechnung können für die Operation Addition und Subtraktion als zweidimensionale Vektoren betrachtet werden. Damit sind ihre Größe (=Norm) und ihr Phasenwinkel in einem einzigen Objekt enthalten, was das Rechnen vereinfacht. Zeigergrößen lassen sich darüber hinaus auch multiplizieren und dividieren, hier gelten aber besondere Rechenregeln.

Die verwendeten Koordinatensysteme sind in diesem Fall komplexe Ebenen. Eine Achse bezeichnet den Realteil und kann für unsere Zwecke hier als x-Achse gesehen werden, die andere beziffert den Imaginärteil und stellt (wieder mit *Vorsicht*) die y-Achse dar.

In einer von einer Wechselspannung gespeisten elektrischen Schaltung wurde die Spannung an einem Widerstand R als „Vektor“ $U_R=[1,2][\mathrm{Volt}]$ (eigentlich Spannungszeiger); an einem Kondensator als „Vektor $U_C=[2,-3]\ [\mathrm{Volt}]$ gemessen.

Geben Sie die Spannungssumme $U_S=U_R+U_C$ und die Spannungsdifferenz $U_D=U_R-U_C$ an.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass der Vektor des Kreuzproduktes aus den Vektoren $a=[0,-2,0]$ und $b=[0,0,4]$ sowohl auf a als auch auf b senkrecht steht.

Tipp: Es gibt außer der rechnerischen Lösung auch eine einfache anschauliche. Betrachten Sie dazu die Vektoren a und b im rechtwinkligen x-y-z-Koordinatensystem.

Aufgabe 6

Zeigen Sie,

a) dass der Vektor $c=a\,x\,b$ ($a=[-1,2,3]$, $b=[2,1,-4]$) auf a und b senkrecht steht.

a) dass der Vektor $d=b\,x\,a$ ebenfalls auf a und b senkrecht steht. Vergleichen Sie die Beträge der Komponenten von c und d und deren Vorzeichen.

Aufgabe 7

Die Seiten eines mit einer Ecke im Ursprung eines x-y-Koordinatensystems liegenden Parallelogramms haben die Komponenten $r=[1,2]$ und $s=[3,1]$. Bestimmen Sie die Fläche.

Hinweis: Die Lösung ist auf verschiedenen Wegen möglich. Einen einfachen Weg bietet das Kreuzprodukt. Dazu müssen Sie die beiden Komponentenangaben zunächst zweckmäßig erweitern.

Aufgabe 8

Das Kreuzprodukt spielt bei vielen technischen Anordnungen eine Rolle, z. B. als Drehmoment = Kraft x Hebelarm. Der Drehmomentvektor steht demnach immer auf der durch die Kraft und den Hebelarm aufgespannten Ebene senkrecht. Ein MTB-ler fährt auf einem ebenen Waldweg und tritt mit konstanter, senkrecht wirkender Beinkraft mit 200 Newton in die Pedalen. Die Kurbeln haben eine Länge von 20 cm.

Wie groß ist das Drehmoment bei den Kurbelstellungen $\alpha=90°$, $\alpha=70°$, $\alpha=0°$, $\alpha=-80°$? Die Bezugsachse liegt parallel zum Weg in Fahrtrichtung.