Mathematik I - Übungsblatt 05
Lösungsvorschläge

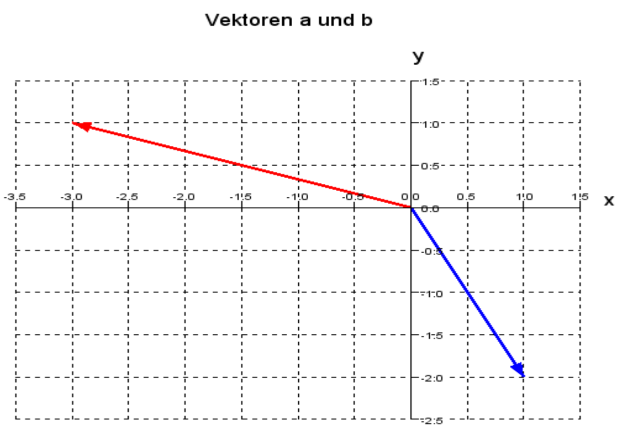
Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden Spaltenvektoren im x-y-Koordinatensystem $a=[1,-2]^T$ und $b=[-3,1]^T$.

a) Skizzieren Sie a und b im x-y-Koordinatensystem. Dabei auf vollständige Beschriftung achten:
   - Achsenskalierung
   - Achsenbeschriftung
   - Was wird dargestellt?

Entweder das unten angegebene kurze **Scilab-Skript** (Linien, keine Pfeile) oder dieses hier ausführen:

```
clf;
a1=[0,1];a2=[0,-2];
b1=[0,-3];b2=[0,1];
plot2d([0 0 0],[0 0 0],style=1);
xgrid;
xlabel('x','fontsize',4,'position',[1.7, 0]);
ylabel('y','fontsize',4,'position',[0,1.7]);
title('Vektoren','fontsize',4);
h1=gca();
h1.x_location='origin';
h1.y_location='origin';
h1.y_label.font_angle=0;
h1.isoview='on';
square(-3.5,-2.5,1.5,1.5);
xarrows(a1,a2,1,2);
h3=gce();
h3.thickness=3;
xarrows(b1,b2,1,5);
h4=gce();
h4.thickness=3;
```



… oder mit Hand zeichnen!

b) Berechnen Sie die Normen und die Winkel mit der positiven x-Achse.

$\|a\|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$, $\|b\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\alpha=\arctan\left(\frac{-2}{1}\right)=-63.4°$ (in Q IV keine Korrektur erforderlich)

$\beta=\arctan\left(\frac{2}{-3}\right)=180°+(-18.4°)=161.6°$ (in Q II Korrektur $180°+\alpha'$ erforderlich)

c) Welchen Winkel schließen a und b ein (den kleineren angeben)?

Man wandelt den Winkel α zunächst durch Addition von 360° in den entsprechenden mathematisch positiven Wert und subtrahiert β :

$\phi=360.0°-63.4°-161.6°=135.0°$

d) Berechnen Sie aus den Ergebnissen zu Punkt a) die Komponenten der Vektoren a und b. Vergleich mit den Vorgaben?

$a_x=\sqrt{5}\cdot\cos(\alpha)=1$, $a_y=\sqrt{5}\cdot\sin(\alpha)=-2$ usw.

e) Bilden Sie das Skalarprodukt $c=a.b$.

$c=a^T\cdot b=1\cdot(-3)+(-2)\cdot 1=-5$, oder

$c=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos(\phi)=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos(135°)=-5$,

oder den unten genannten Scilab-Ausdruck nehmen.

f) Bestimmen Sie mit dem Skalarprodukt c aus Punkt e) den Winkel zwischen den Vektoren a und b. Vergleich mit Ergebnis aus Punkt b)?

$\phi^*=\arccos\left(\frac{c}{\|a\|\cdot\|b\|}\right)=135°$

Achtung: In Scilab für Grad Winkelmaß → ***acosd( )*** wählen!

Tipp: Verwenden Sie zur Kontrolle folgende Scilab-Funktionen, bzw. Befehlsfolgen:

- Zur Eingabe der Vektoren: ***a= [1,-2]'*** usw.
- Für die Skizze (entweder als Befehlsfolge in der Scilab-Konsole eingeben oder mit **SciNotes** als komplettes Programm-Skript schreiben. Letzteres ist **viel** günstiger, da es nach Speichern immer wieder zur Verfügung steht und sich außerdem leicht ändern und anpassen lässt):

```
clf;
plot2d([0,a(1)],[0,a(2)]);
plot2d([0,b(1)],[0,b(2)]);
xgrid;
ah=gca();
ah.x_location="origin";ah.y_location="origin"; xlabel('x','fontsize',4);ylabel('y','fontsize',4);
title('Vektoren','fontsize',4);
```

- Für die Normen: ***norm(a)*** usw.
- Für die Winkel: ***atand(a(2)/a(1))***, usw.
- Für das Skalarprodukt: ***c= sum(a.*b)***
- Für den Winkel: ***phi = acosd(c/(norm(a)*norm(b)))***

Aufgabe 2

Gegeben sind die beiden Vektoren $u=[1,-1,\ 2,-2,\ 3]$ und $v=[3,\ 2,-3,\ 5,-1]$.

a) Länge von u? $\|u\|=\sqrt{(19)}$

b) Länge von v? $\|v\|=\sqrt{(48)}$

c) Bestimmen Sie das Skalarprodukt von u und v.

$$c=u.v=1\cdot3+(-1)\cdot2+2\cdot(-3)+(-2)\cdot5+3\cdot(-1)=-18$$

Aufgabe 3

Ein Handkarren wird von einer Person auf einer ebenen Straße mit einer Kraft von 150 Newton über eine im Winkel 50° schräg zur Ebene stehende Deichsel eine Strecke von 500 Metern gezogen. Geben Sie die am Handkarren geleistete Arbeit an.

- *Arbeit* = *Kraft* mal *Weg* = Skalarprodukt aus Kraftvektor f und Wegvektor p.

  Achtung: Diese allereinfachste Formel gilt nur, wenn die Kraft unabhängig vom Weg ist, was hier angenommen wurde. Allgemein berechnet sich bei einem Weg längs der x-Achse die Arbeit aus dem Integral der Kraft über den Weg von x=a nach x=b (hier ist b-a = 500 Meter):

  $$\text{Arbeit}=\int_a^b f(x)\,dx \quad .$$

- Man wählt ein günstig liegendes x-y-Koordinatensystem, z. B. mit dem Wegvektor p im Ursprung und parallel zur x-Achse. Dann ist $p=[500,0][m]$.

- Der Kraftvektor f bildet mit dem Wegvektor p einen Winkel von 50°. Damit hat f die Komponenten

  $f_x=150\cdot\cos(50°)=96.4[N]$ und $f_y=150\cdot\sin(50°)=114.9[N]$

- $\text{Arbeit}=f.l^T=48209[Nm]=48.2[kNm]$

Aufgabe 4

Ein Vorgriff auf das Rechnen mit komplexen Zahlen: Die komplexen Zeigergrößen für Spannungen und Ströme der Wechselstromrechnung können für die Operation Addition und Subtraktion als zweidimensionale Vektoren betrachtet werden. Damit sind ihre Größe (=Norm) und ihr Phasenwinkel in einem einzigen Objekt enthalten, was das Rechnen vereinfacht. Zeigergrößen lassen sich darüber hinaus auch multiplizieren und dividieren, hier gelten aber besondere Rechenregeln.

Die verwendeten Koordinatensysteme sind in diesem Fall komplexe Ebenen. Eine Achse bezeichnet den Realteil und kann für unsere Zwecke hier als x-Achse gesehen werden, die andere beziffert den Imaginärteil und stellt (wieder mit *Vorsicht*) die y-Achse dar.

In einer von einer Wechselspannung gespeisten elektrischen Schaltung wurde die Spannung an einem Widerstand R als „Vektor“ $U_R=[1,2][Volt]$ (eigentlich Spannungszeiger); an einem Kondensator als „Vektor $U_C=[2,-3]\ [Volt]$ gemessen.

Geben Sie die Spannungssumme $U_S=U_R+U_C$ und die Spannungsdifferenz $U_D=U_R-U_C$ an.

$U_S=U_R+U_C=[1+2,2-3]=[3,-1]$ (als komplexer Zeiger: $U_s=3+j\cdot(-1)\ [Volt]$)

$U_D=U_R-U_C=[1-2,2-(-3)]=[-1,+5]$ (als komplexer Zeiger: $U_D=-1+j\cdot5\ [Volt]$)

j ist die imaginäre Einheit $j=\sqrt{-1}$ der komplexen Zahlen.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass der Vektor des Kreuzproduktes aus den Vektoren $a=[0,-2,0]$ und $b=[0,0,4]$ sowohl auf a als auch auf b senkrecht steht.

Tipp: Es gibt außer der rechnerischen Lösung auch eine einfache anschauliche. Betrachten Sie dazu die Vektoren a und b im rechtwinkligen x-y-z-Koordinatensystem.

Der Vektor a liegt parallel zur y-Achse, der Vektor b liegt parallel zu z-Achse, das Kreuzprodukt ist der Vektor

$$c=[a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y,\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z,\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot bx]=[(-2)\cdot 4,0,0]=[-8,0,0]$$

Er liegt parallel zu x-Achse und steht wegen des rechtwinkligen Koordinatensystems auf a und b senkrecht.

Man kann auch die Saklarprodukte $c.a$ und $c.b$ bestimmen. Diese müssen beide 0 sein.

Aufgabe 6

Zeigen Sie,

a) dass der Vektor $c=a\,x\,b$ ($a=[-1,2,3]$, $b=[2,1,-4]$) auf a und b senkrecht steht.

Die Skalarprodukte $c.a$ und $c.b$ müssen beide 0 sein.

$c=a\ x\ b=[-11,2,-5]$

$c.a=0$, $c.b=0$

b) dass der Vektor $d=b\,x\,a$ ebenfalls auf a und b senkrecht steht. Vergleichen Sie die Beträge der Komponenten von c und d und deren Vorzeichen.

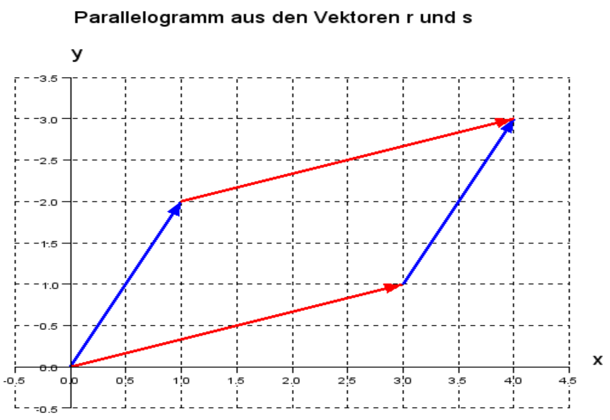
$d=b\ x\ a=[11,-2,+5] \rightarrow d=-c$.

Aufgabe 7

Die Seiten eines mit einer Ecke im Ursprung eines x-y-Koordinatensystems liegenden Parallelogramms haben die Komponenten $r=[1,2]$ und $s=[3,1]$. Bestimmen Sie die Fläche.

Hinweis: Die Lösung ist auf verschiedenen Wegen möglich. Einen einfachen Weg bietet das Kreuzprodukt. Dazu müssen Sie die beiden Komponentenangaben zunächst zweckmäßig erweitern,

z. B. mit einer z-Komponente 0: $r=[1,2,0]$, $s=[3,1,0]$. Ein Diagramm:



Erzeugt mit folgendem **Scilab-Skript**:

```
clf;
a1=[0,1];a2=[0,2];
b1=[0,3];b2=[0,1];
a1p=[3,4];a2p=[1,3];
b1p=[1,4];b2p=[2,3];
plot2d([0 0 0],[0 0 0],style=1);
xgrid;
xlabel('x','fontsize',4,'position',[4.7, 0]);
ylabel('y','fontsize',4,'position',[0,3.7]);
title('Parallelogramm aus den Vektoren r und s','fontsize',4);
h1=gca();
h1.x_location='origin';
h1.y_location='origin';
h1.y_label.font_angle=0;
h1.isoview='on';
square(-0.5,-0.5,4.5,3.5);
xarrows(a1,a2,1,2);
h3=gce();
h3.thickness=3;
xarrows(b1,b2,1,5);
h4=gce();
h4.thickness=3;
xarrows(a1p,a2p,1,2);
h5=gce();
h5.thickness=3;
xarrows(b1p,b2p,1,5);
h6=gce();
h6.thickness=3;
```

Norm des Kreuzprodukts ist die Parallelogrammfläche:

$$c=[0,0,-5] \quad \rightarrow \quad \|c\|=5$$

Mit der herkömmlichen Formel lässt sich das überprüfen: Fläche = Grundseite mal Höhe.

- Die Länge l der Grundseite ist die Norm von s: $l=\|s\|=\sqrt{10}$.
- Der Winkel zwischen r und s wird mit Hilfe des Skalarproduktes ermittelt: $\phi=45°$.
- Die Höhe ist $h=\|r\|\cdot\sin(45°)=\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5$.

Aufgabe 8

Das Kreuzprodukt spielt bei vielen technischen Anordnungen eine Rolle, z. B. als

Drehmoment = *Kraft* x *Hebelarm*.

Der Drehmomentvektor steht demnach immer auf der durch die Kraft und den Hebelarm aufgespannten

Ebene senkrecht.

Ein MTB-ler fährt auf einem ebenen Waldweg und tritt mit konstanter, senkrecht nach unten wirkender Beinkraft mit 200 Newton in die Pedalen. Die Kurbeln haben eine Länge von 20 cm.

Wie groß ist das Drehmoment bei den Kurbelstellungen $\alpha=90°$, $\alpha=70°$, $\alpha=0°$, $\alpha=-80°$?

Die Bezugsachse liegt parallel zum Weg in Fahrtrichtung.

M = f x r

Man stellt den Kraftvektor und den Hebelarmvektor r in einem x-y-z-Koordinatensystem dar. Zweckmäßig ist es, die Kraft parallel zur y-Achse in negativer Richtung und den Hebelarm mit dem Winkel α zur x-Achse in positiver Richtung zu legen:

$$f=-[0,\ f_y,\ 0]=[0,\ -200,\ 0]\ [N] \quad , \quad r=[\|r\|\cdot\cos(\alpha),\ \|r\|\cdot\sin(\alpha),\ 0]\ [cm] \ \text{ mit } \ \|r\|=20\ [cm]$$

Dann hat der Drehmomentvektor M nur eine Komponente in z-Richtung:

$$M=[0,\ 0,\ f_x\cdot r_y-f_y\cdot r_x]=[0,\ 0,\ -f_y\cdot r_x]$$

Der Kraftvektor weist immer in Richtung der negativen y-Achse.

α gibt den Winkel der Kraft zum Hebelarm und damit zur x-Achse an. Zur Bestimmung von M berechnet man zunächst die Komponente r_x des Hebelarms in Abhängigkeit des Winkels α .

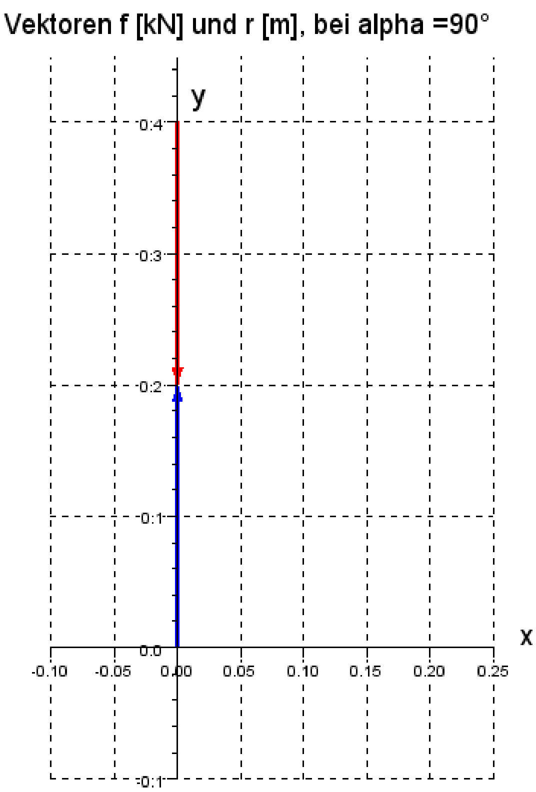
$\alpha=90°$: $M=[0,\ 0,\ 200\cdot 0.2\cdot\cos(90°)]=[0,\ 0,\ 0]\ [Ncm]$

(**kein Drehmoment**, da Kurbel in oberer Stellung)

Scilab-Skript: (Beispiel, welches noch effektiver gestaltet werden kann):

```
clf;
a1=[0,0];a2=[0.4,0.2];
b1=[0,0];b2=[0,0.2];
a1p=[0,0];a2p=[0.4,0.2];
plot2d([0 0 0],[0 0 0],style=1);
xgrid;
xlabel('x','fontsize',4,'position',[0.27, 0]);
ylabel('y','fontsize',4,'position',[0.01,0.41]);
title('Vektoren f [kN] und r [m], bei alpha =90°','fontsize',4);
h1=gca();
h1.x_location='origin';
h1.y_location='origin';
h1.y_label.font_angle=0;
h1.isoview='on';
square(-0.1,-0.1,0.25,0.45);
xarrows(a1,a2,0.1,5);
h3=gce();
h3.thickness=3;
xarrows(b1,b2,0.1,2);
h4=gce();
```

```
h4.thickness=3;
xarrows(a1p,a2p,0.1,5);
h5=gce();
h5.thickness=3;
```



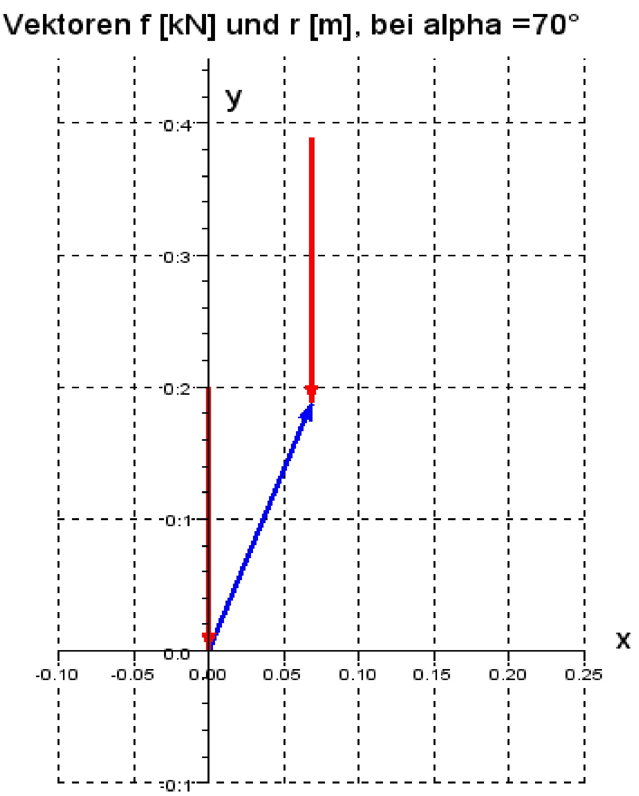
$\alpha=70°$: $\quad M=[0,\ 0,\ 200\cot 0.2\cdot\cos(70°)]=[0,\ 0,\ 13.7]\ [\mathrm{Ncm}]$

Scilab-Skript: (wieder nur ein Beispiel, das noch effektiver gestaltet werden kann)

```
clf;
alf=70;
ax=0.2*cosd(alf);
ay=0.2*sind(alf);
a1=[ax,ax];a2=[ay+0.2,ay];
b1=[0,ax];b2=[0,ay];
a1p=[0,0];a2p=[0.2,0];
plot2d([0 0 0],[0 0 0],style=1);
xgrid;
```

```
xlabel('x','fontsize',4,'position',[4.7, 0]);
ylabel('y','fontsize',4,'position',[0,3.7]);
title('Vektoren f und r, bei alpha =70°','fontsize',4);
h1=gca();
h1.x_location='origin';
h1.y_location='origin';
h1.y_label.font_angle=0;
h1.isoview='on';
square(-0.1,-0.1,0.25,0.45);
xarrows(a1,a2,0.1,5);
h3=gce();
h3.thickness=3;
xarrows(b1,b2,0.1,2);
h4=gce();
h4.thickness=3;
xarrows(a1p,a2p,0.1,5);
h5=gce();
h5.thickness=3;
```

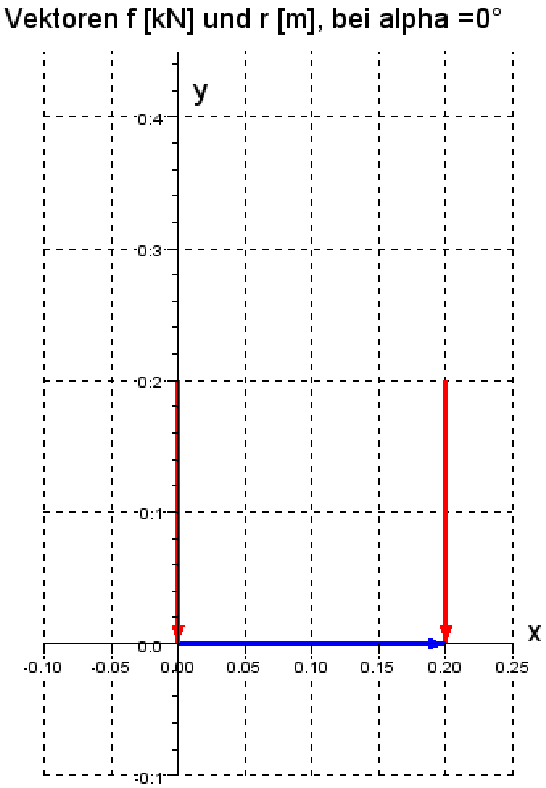
Bitte beachten: Kraftvektoren können zur Bestimmung von Drehmomenten beliebig parallel verschoben werden, daher die Platzierung auf der y-Achse.



$\alpha = 0°$: $M = [0,\ 0,\ 200 \cdot 0.2 \cdot \cos(0°)] = [0,\ 0,\ 40]\ [\text{Ncm}]$

(**maximales Drehmoment**, da Kraft senkrecht zur Kurbel)

Scilab-Skript bei Bedarf selbst erstellen, z. B. aus der Vorlage zu $\alpha = 70°$.



$\alpha = -80°$ $M = [0,\ 0,\ 200 \cdot \cos(-80°)] = [0,\ 0,\ 34.7]\ [\text{Ncm}]$

(selber machen)