

Mathematik 1 - Übungsblatt 6

... täglich einmal Scilab!

Aufgabe 1 (LGS in Matrix-Spaltenvektor-Darstellung umschreiben)

Gegeben ist das LGS

$$-x_2 - 1 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_1 = 0$$

$$1 + 2 \cdot x_3 - x_1 = x_2$$

$$x_3 = x_1 + x_2$$

- Stellen Sie es in der Matrix-Spaltenvektor-Form $A \cdot x = b$ dar.
- Wie viele der Gleichungen sind linear unabhängig?
- Geben Sie die Lösung an.

Aufgabe 2 (LGS in Zeilenvektor-Matrix-Darstellung)

- Bringen Sie das LGS von Aufgabe 1 in die Zeilenvektor-Form $x \cdot A' = b$. Die 3 Unbekannten sind dann in einem horizontalen Vektor $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ angeordnet.
- Die Matrix A' gemäß a) enthält zwar die gleichen Elemente wie A , diese sind aber anders angeordnet. Was fällt Ihnen dabei auf? Betrachten Sie die Zeilen und Spalten von A und A' .

Aufgabe 3 (Bestimmung linear unabhängiger Zeilen eines LGS)

Gegeben ist das LGS

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 1$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 = 0$$

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 = 0$$

$$4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 = 0$$

- Wie viele linear unabhängige Zeilen hat es?
- Ist das LGS lösbar? Begründung?

Aufgabe 4 (Berechnung der Determinanten von 3x3-Matrizen)

- Bestimmen Sie mit der Sarrus-Regel die Determinante der Matrix A aus Aufgabe 1.
- Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A' aus Aufgabe 2.
- Was fällt Ihnen an den beiden Ergebnissen auf?

Aufgabe 5 (Berechnung der Determinante einer 2x2-Matrix)

Die Determinante einer mit ihren Elementen gegebenen quadratischen 2x2-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ ist } \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- a) Bestimmen Sie die Determinante zur Koeffizientenmatrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ eines LGS.
- b) Wie viele linear unabhängige Zeilen enthält es?
- c) Bestimmen Sie die Determinante zur Koeffizientenmatrix $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$ eines LGS.
- d) Sind die Zeilen des LGS zu c) linear unabhängig?
- e) Bilden Sie aus der Matrix A von a) eine neue Matrix A' durch Vertauschen der Zeilen und Spalten und bestimmen Sie die Determinante von A' . Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 6 (Thema selbst herausfinden ...)

Schreiben Sie die Matrix A von Aufgabe 1 auf und fügen Sie die 3x3-Einheitsmatrix I rechts daneben an, also $C = [A|I]$:

- a) Führen Sie nun an dieser Anordnung „A | I“ zeilenweise elementare Operationen (=Äquivalenz-Operationen) durch, so dass als Ergebnis auf der linken Seite eine 3x3-Einheitsmatrix I und rechts eine 3x3-Matrix A^* entsteht, also $D = [I|A^*]$
- b) Bilden Sie die Produktmatrix $E = A^* \cdot A$
- c) Bilden Sie die Produktmatrix $F = A \cdot A^*$
- d) Vergleichen Sie die Ergebnisse. Welche Besonderheit fällt auf?

Aufgabe 7

Berechnen Sie mit der Matrix A^* aus Aufgabe 6 und dem Spaltenvektor b aus Aufgabe 1a) den Spaltenvektor $y = A^* \cdot b$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von 1c). Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 8 (Thema selbst herausfinden ...)

Schreiben Sie die Matrix A' von Aufgabe 2 auf und fügen Sie die 3x3-Einheitsmatrix I rechts daneben an, also $C = [A'|I]$.

- a) Führen Sie nun zeilenweise an dieser Anordnung „A' | I“ elementare Operationen (=Äquivalenz-Operationen) durch, so dass als Ergebnis auf der linken Seite eine 3x3-Einheitsmatrix I und rechts eine 3x3-Matrix A'^* entsteht, also $D = [I|A'^*]$.
- b) Bilden Sie die Produktmatrix $E = A'^* \cdot A'$
- c) Bilden Sie die Produktmatrix $F = A' \cdot A'^*$

Aufgabe 9

Berechnen Sie mit der Matrix A'^* aus Aufgabe 8 und dem Zeilenvektor b aus Aufgabe 2a) den Zeilenvektor $z = b \cdot A'^*$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von 1c). Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 10

Bilden Sie zur 2x2-Matrix A von Aufgabe 5 nach dem Verfahren von Aufgabe 6 die 2x2-Matrix A^* .