Mathematik 1 - Übungsblatt 6

Lösungshinweise

Aufgabe 1 (LGS in Matrix-Spaltenvektor-Darstellung umschreiben)

Gegeben ist das LGS

$$-x_2-1+3\cdot x_3+2\cdot x_1=0$$
$$1+2\cdot x_3-x_1=x_2$$
$$x_3=x_1+x_2$$

a) Stellen Sie es in der Matrix-Spaltenvektor-Form A ·x = b dar.

$$A\cdot x=b=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scilab: → A=[2 -1 3; -1 -1 2; 1 1 -1], b=[1; -1; 0]' → b ist transponiert!

b) Wie viele der Gleichungen sind linear unabhängig?

Scilab: rank(A) → Rang(A) =3 → 3 linear unabhängige Gleichungen.

… oder von Hand.

c) Geben Sie die Lösung an.

Scilab: → ***x=A\b*** → $x=[1,-2,1]^T$

… oder von Hand:

Aufgabe 2 (LGS in Zeilenvektor-Matrix-Darstellung)

a) Bringen Sie das LGS von Aufgabe 1 in die Zeilenvektor-Form x·A' = b. Die 3 Unbekannten sind dann in einem horizontalen Vektor $x=[x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]$ angeordnet.

Transponieren beider Seiten: $(A\cdot x)^T=b^T \;\rightarrow\; x^T\cdot A^T=b^T$

b) Die Matrix A' gemäß a) enthält zwar die gleichen Elemente wie A, diese sind aber anders angeordnet. Was fällt Ihnen dabei auf? Betrachten Sie die Zeilen und Spalten von A und A'.

→ Zeilen und Spalten sind vertauscht

Aufgabe 3 (Bestimmung linear unabhängiger Zeilen eines LGS)

Gegeben ist das LGS

$$x_1+2\cdot x_2+3\cdot x_3+4\cdot x_4=1$$
$$2\cdot x_1+3\cdot x_2+4\cdot x_3+5\cdot x_4=0$$
$$3\cdot x_1+4\cdot x_2+5\cdot x_3+6\cdot x_4=0$$
$$4\cdot x_1+5\cdot x_2+6\cdot x_3+7\cdot x_4=0$$

a) Wie viele linear unabhängige Zeilen hat es?

Gemäß Kapitel 11 wird der linke Teil des LGS durch elementare Zeilen- oder Spaltenoperationen mit dem Gauß'schen Algorithmus in eine obere rechte Dreiecksmatrix umgeformt. Entstehen hierbei Nullzeilen, so sind diese linear abhängig, d. h., dass diese Zeilen als Linearkombinationen der unabhängigen Zeilen entstanden. Tritt eine solche Konstellation im Rahmen des Lösungsversuchs einer technischen Aufgabenstellung auf, so hat man überflüssige Gleichungen einbezogen oder Fehler gemacht.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Zeile 2 -2 Zeile 1, Z3} - 3\text{ Z1, Z4-4 Z1} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -4 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Z3-2 Z2, Z4} - 3\text{ Z2} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Zeile 4 ist das zweifache von Zeile 3, also linear abhängig. Daher hat das Gleichungssystem nur 3 linear unabhängige Zeilen, der Rang der (4 x 4)-Koeffizientenmatrix ist 2, der Rang der aus der Koeffizientenmatrix und dem Spaltenvektor der rechten Seite zusammengesetztem (4 x 5)-Matrix ist 3.

In Scilab:

B=[1 2 3 4; 2 3 4 5; 3 4 5 6; 4 5 6 7]

rB=rank(B) (=2)

b=[1; 0; 0; 0]'

C=[B,b]

rC=rank(C) (=3)

b) Ist das LGS lösbar? Begründung?

Unlösbar, da das LGS linear abhängige Zeilen enthält.

Aufgabe 4 (Berechnung der Determinanten von 3x3-Matrizen)

a) Bestimmen Sie mit der Sarrus-Regel die Determinante der Matrix A aus Aufgabe 1.

$$\det A = 2\cdot(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot2\cdot1+3\cdot(-1)\cdot1-3\cdot(-1)\cdot1-(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)-2\cdot2\cdot1=-3$$

Scilab → ***detA=det(A)*** (= -3)

b) Bestimmen Sie die Determinate der Matrix A' aus Aufgabe 2.

Scilab →***detAt=det(A')*** (= -3)

c) Was fällt Ihnen an den beiden Ergebnissen auf?

Die Determinante der transponierten Matrix hat den gleichen Wert.

Aufgabe 5 (Berechnung der Determinante einer 2X2-Matrix)

Die Determinante einer mit ihren Elementen gegebenen quadratischen 2x2-Matrix

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ist} \quad \det(A)=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

a) Bestimmen Sie die Determinante zur Koeffizientenmatrix $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ eines LGS.

Det(A) = 12-10 = 2

Scilab → ***A=[4 2; 5,3], detA=det(A)*** (=2)

b) Wie viele linear unabhängige Zeilen enthält es?

2 linear unabhängige Zeilen

Scilab → ***rangA=rank(A)*** (=2)

c) Bestimmen Sie die Determinante zur Koeffizientenmatrix $B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$ eines LGS.

Det(B) = -24 -(-24) =0.

d) Sind die Zeilen des LGS zu c) linear unabhängig? → nein

e) Bilden Sie aus der Matrix A von a) eine neue Matrix A' durch Vertauschen der Zeilen und Spalten und bestimmen Sie die Determinante von A'. Was fällt Ihnen auf?

Transponieren ändert den Wert der Determinante nicht.

Aufgabe 6 (Thema selbst herausfinden …)

Schreiben Sie die Matrix A von Aufgabe 1 auf und fügen Sie die 3X3-Einheitsmatrix I rechts daneben an, also „A I“.

$$C=[A|I]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scilab → ***C=[A ,eye(3)]***

a) Führen Sie nun für C zeilenweise elementare Operationen (=Äquivalenz-Operationen) durch, so dass als Ergebnis auf der linken Seite eine 3x3-Einheitsmatrix I und rechts eine 3x3-Matrix A* entsteht, also „I A*“.

$$D=[I|A^*]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 5/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Bilden Sie die Produktmatrix E = A* ·A

Selber machen, es ergibt sich $E=A^*\cdot A=I$:

c) Bilden Sie die Produktmatrix F = A A*

Selber machen, es ergibt sich $F = A \cdot A^* = I$.

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse. Welche Besonderheit fällt auf?

Die Multiplikation einer Matrix mit ihrer Inversen ist kommutativ.

Aufgabe 7

Berechnen Sie mit der Matrix A* aus Aufgabe 6 und dem Spaltenvektor b aus Aufgabe 1a) den Spaltenvektor $y = A^* \cdot b$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von 1c). Was fällt Ihnen auf?

Selber machen, die Ergebnisse sind gleich.

Aufgabe 8 (Thema selbst herausfinden und selbst lösen)

Schreiben Sie die Matrix A' von Aufgabe 2 auf und fügen Sie die 3X3-Einheitsmatrix I rechts daneben an, also „A' I“.

a) Führen Sie nun zeilenweise an dieser Anordnung „A' I“ elementare Operationen (=Äquivalenz-Operationen) durch, so dass als Ergebnis auf der linken Seite eine 3x3-Einheitsmatrix I und rechts eine 3x3-Matrix A'* entsteht, also „I A'*“.

(Ähnlich wie bei Aufgabe 6)

b) Bilden Sie die Produktmatrix E = A'* ·A'

c) Bilden Sie die Produktmatrix F = A'·A*'

Aufgabe 9

Berechnen Sie mit der Matrix A'* aus Aufgabe 8 und dem Zeilenvektor b aus Aufgabe 2a) den Zeilenvektor $z = b \cdot A'^*$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von 1c). Was fällt Ihnen auf?

→ $z = x^T$

Aufgabe 10

Bilden Sie zur 2x2-Matrix A von Aufgabe 5 nach dem Verfahren von Aufgabe 6 die 2x2-Matrix A*.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^* = A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$