Mathematik 1 - Übungsblatt 7

… täglich einmal Scilab!

Aufgabe 1 (Definitionsformel für Determinanten)

Determinanten quadratischer Matrizen sind skalare Größen (=einfache Zahlen im Gegensatz zu vektoriellen Größen), die sich aus einer n x n-Matrix

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

über den Ausdruck

$$\det(A) = \sum_{\text{alle Permutationen von } \alpha\ \beta\ \gamma\ \dots\ \omega} (-1)^k \cdot a_{1\alpha} \cdot a_{2\beta} \cdot a_{3\gamma} \cdot \ \dots \ \cdot a_{n\omega}$$

mit $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, …. , $\omega=n$

$k \rightarrow$ Anzahl der Inversionen (= Vertauschungen gegenüber der Ausgangsreihenfolge

$\alpha\ \beta\ \gamma\ \dots\ \omega$)

berechnen lässt.

a) Wie viele Permutationen der Zweit-Indices $\alpha\ \beta\ \gamma\ \dots\ \omega$ gibt es bei $\omega=n$?

b) Bestätigen Sie über die oben angegebene allgemeine Definition die Merkregel für Determinanten von 2x2-Matrizen

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad .$$

c) Bestätigen Sie die **Sarrus-Regel** für Determinanten von 3x3-Matrizen.

Aufgabe 2 (Determinanten)

a) Wie viele Permutationen der Zweit-Indices gibt es bei einer 4 x 4-Matrix A?

b) Stellen Sie zur Determinanten-Berechnung für $\underline{A}$ irgendwelche 6 Permutationen der Zweit-Indices auf. **Tipp:** Nicht zwingend, aber wegen der Systematik übersichtlich wird es, wenn man zuerst die beiden letzten Zweit-Indices vertauscht, dann den zweiten und dritten usw.

c) Bestimmen Sie die Inversionen k zu jeder Permutation von b).

d) Bestimmen Sie zu den Permutationen von b) die vorzeichenrichtigen Summenterme in det($\underline{A}$).

Aufgabe 3 (Unterdeterminanten)

Wenn eine n x n-Matrix auch Nullelemente besitzt, liefern die zugehörigen Terme in der Determinanten-Formel keine Beiträge.

a) Untersuchen Sie für die Matrix

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

welche Summenterme in der Determinante det(A) herausfallen und markieren Sie die entsprechenden Matrixelemente.

b) Untersuchen Sie für die Matrix

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

welche Summenterme in der Determinante det(B) herausfallen und markieren Sie die entsprechenden Matrixelemente.

c) Untersuchen Sie für die Matrix

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

welche Summenterme in der Determinante det(C) herausfallen und markieren Sie die entsprechenden Matrixelemente.

d) Was fällt Ihnen bei a), b) und c) zu den Positionen der markierten Elemente auf? **Hinweis:** Die markierten Elemente lassen sich einer Struktur zuordnen, die man als Unter-Matrizen der jeweiligen 0-Elemente bezeichnet.

Aufgabe 4 (Vereinfachung der Determinanten-Berechung durch Erzeugen von Nullelementen)

Gegeben ist die Matrix

$$P=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie det(P).

b) Erzeugen Sie durch elementare Operationen aus P die Matrix Q , deren mittleres Element „0“ ist.

c) Bestimmen Sie det(Q).

d) Erzeugen Sie durch elementare Operationen aus P die Matrix R , deren linkes unteres Element „0“ ist.

e) Bestimmen Sie det(R).

f) Erzeugen Sie aus P eine rechte obere Dreiecksmatrix S und bestimmen Sie det(S).

g) Was fällt Ihnen bei den Determinanten auf?

h) Wie wirken sich die „0“-Elemente in der Sarrus-Regel aus?

Aufgabe 5 (Matrix-Addition)

Gegeben sind

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) Bilden Sie die Summen $C = A+B$ und $D = B+A$.

b) Weisen die Ergebnisse von a) darauf hin, dass für die Matrizen-Addition das Kommutativgesetz (=Vertauschbarkeit der Summanden) gilt?

Aufgabe 6 (Matrix-Multiplikation)

Gegeben sind

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Produkt-Matrix $C = A \cdot B$.

b) Bestimmen Sie die Produkt-Matrix $D = B \cdot A$.

c) Erklären Sie die unterschiedlichen Ergebnisse zu a) und b).

d) Gilt für die Matrix-Multiplikation das Kommutativgesetz (=Vertauschbarkeit der Faktoren)?

Aufgabe 7 (Matrix-Multiplikation)

Gegeben sind ein Spalten- und ein Zeilenvektor

$$a=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a) Geben Sie die Dimensionen (Zeilenzahl x Spaltenzahl) von a und b an, wenn man sie als Matrizen interpretieren würde.

b) Bilden Sie das Produkt $C = b \cdot a$ **Hinweis:** Es gilt immer „Zeile x Spalte“. Aus wie viel Elementen besteht dann z. B. die erste Zeile von b und die erste Spalte von a?

c) Berechnen Sie det(C).

d) Berechnen Sie den Rang von C.

Aufgabe 8 (Transponierte Matrizen)

Gegeben ist die Matrix

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} .$$

a) Bilden Sie die Transponierte A^T.

b) Berechnen Sie $B = A \cdot A^T$.

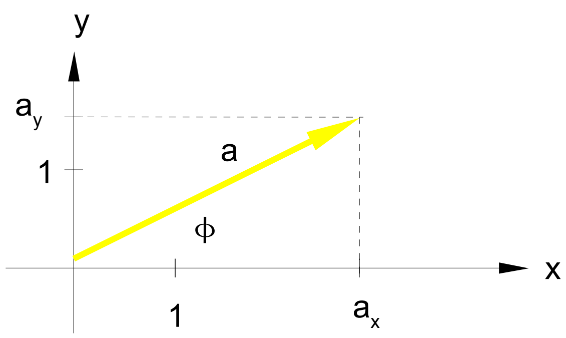
c) Was fällt Ihnen an der Struktur von B auf?

Aufgabe 9 (Vektoren)

Gegeben ist der zweidimensionale Spaltenvektor

$$a=\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \text{ mit den Elementen } a_x=3 \quad , \quad a_y=2 \quad .$$

Man kann diesen abstrakten Vektor als gerichtete Größe in einem x-y-Koordinatensystem darstellen, wie es für viele physikalische Größen (Kräfte, Drehmomente, Temperaturgefälle, Geschwindigkeiten) üblich ist.



a) Nennen Sie die 4 Eigenschaften, mit denen ein physikalischer Vektor vollständig beschrieben ist.

b) Bestimmen Sie die Länge $\|a\|$ (=Euklidische Norm) des Vektors.

c) Bestimmen Sie den Winkel ϕ (= griechisch „phi“) seiner Richtungslinie zur positiven x-Achse.

Aufgabe 10 (Umrechnen der Vektor-Bestimmungselemente)

Gegeben ist ein Vektor b der Länge $\|b\| = 5$. Seine Richtungslinie bildet mit der positiven x-Achse eines rechtwinkligen x-y-Koordinatensystems einen Winkel von 130°.

a) Bestimmen Sie die beiden Vektorelemente (=Koordinaten) b_x , b_y.

b) Skizzieren Sie b im Koordinatensystem.

Aufgabe 11 (Verändern eines Vektors durch Multiplikation mit einer quadratischen Matrix)

Gegeben ist der Spaltenvektor

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{und die Matrix} \quad M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha = 80° \quad .$$

a) Bestimmen Sie die Norm $\|\underline{a}\|$ und den Winkel ϕ zur positiven x-Achse.

b) Bestimmen Sie den Vektor $t = M \cdot a$.

c) Bestimmen Sie die Norm $\|t\|$ und den Winkel θ (griechisch „teta“) zur positiven x-Achse.

d) Welchen Winkel bilden die beiden Vektoren r und t? Vergleichen Sie diesen mit α .

e) Welche Wirkung hat die Multiplikation mit M auf die Norm und den Winkel von t?

f) Bestimmen Sie det(M).