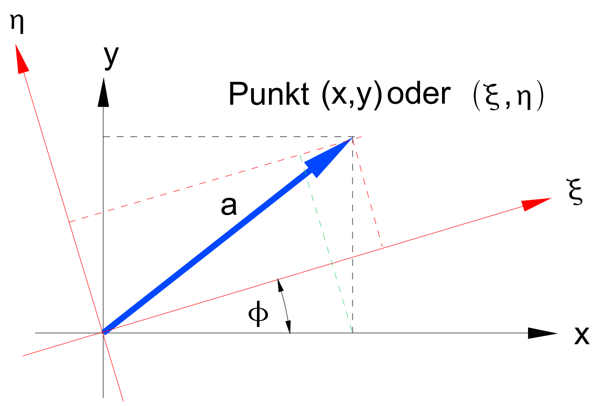
Mathematik 1 - Übungsblatt 8
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Drehung von Koordinatensystemen)

Gegeben ist der Vektor $a=[x \;\; y]^T$ (Spaltenvektor) im x-y-Koordinatensystem. Seine Komponenten sollen in dem um den Ursprung mit den Winkel ϕ gedrehten $\xi-\eta$ -Koordinatensystem angegeben werden, also $a=[\xi \;\; \eta]^T$, (ξ = griechisch „xi“, η = griechisch „eta“) . Der Vektor selbst ändert sich dabei nicht, nur seine Beschreibung. Diese Aufgabenstellung kommt z. B. in der Elektrotechnik im Zusammenhang mit den rotierenden Elementen der Elektromotoren und in der Technischen Mechanik bei der Bestimmung von Trägheitsmomenten für die Biegelinien-Berechnung belasteter Balken vor.



a) Stellen Sie mit den Angaben x, y und ϕ die beiden Gleichungen auf, mit denen sich die Komponenten im gedrehten Koordinatensystem beschreiben lassen. **Hinweis:** Überlegen Sie sich, wo der Winkel ϕ überall auftritt und verwenden Sie die Lage der grün gestrichelten Hilfslinie. Die Koordinate ξ z. B. lässt sich dann über zwei einfach anzugebende Anteile aus den Koordinaten x und y bestimmen.

$$\xi = x\cdot\cos(\phi)+y\cdot\sin(\phi)$$
$$\eta = -x\cdot\sin(\phi)+y\cdot\cos(\phi)$$

b) Stellen Sie die Gleichungen in Matrix-Spaltenvektor-Form dar und benennen Sie die Matrix mit M.

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi)\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = M\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

c) Bilden Sie die Transponierte $\underline{M}^T$.

$$M^T = \begin{bmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & \cos(\phi)\end{bmatrix}$$

d) Bilden Sie das Produkt $M\cdot M^T$.

$$M\cdot M^T = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

e) Was fällt Ihnen beim Ergebnis zu d) auf? → $M^T = M^{-1}$

Die Transponierte ist zugleich die Inverse zu M → M ist eine orthogonale Matrix.

Aufgabe 2 (Drehung von Koordinatensystemen)

Der Vektor a aus Aufgabe 1 soll nun im $\xi - \eta$ -Koordinatensystem mit den Koordinaten ξ und η gegeben sein. Das x-y-Koordinatensystem ist um den Winkel $-\phi$ gedreht.

a) Bestimmen Sie die Transformations-Gleichungen für das x-y-System.

Man stellt diese Gleichung auf, wie bei Aufgabe 1, jetzt ist jedoch das $\xi - \eta$ -Koordinatensystem die Ausgangsbasis.

Einfacher: Da die Koordinaten mit dem Winkel $-\phi$ gedreht werden, bleibt der Ablauf unverändert. Man setzt in die Matrix M diesen Winkel ein und vertauscht die Vektoren:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\phi) & \sin(-\phi) \\ -\sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \underline{M}^{*} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

b) Stellen Sie die Gleichungen in Matrix-Spaltenvektor-Form dar und benennen Sie die Matrix mit M^*. → siehe a)

c) Vergleichen Sie M^* mit $\underline{M}^T$ aus Aufgabe 1c). Was fällt Ihnen auf? → Gleich

Aufgabe 3 (Beschreibung von Matrizen)

Gegeben ist eine (m x q)-Matrix A und eine (n x p)-Matrix B.

a) Schreiben Sie beide Matrizen als allgemeine Rechteckschemata mit den indizierten Elementen a_{ij} bzw. b_{ij}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mq} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

b) Welche Beziehungen müssen zwischen den Grenz-Indices m, n, p und q bestehen, damit die Matrix-Multiplikationen

$C = A \cdot B$ oder $D = B \cdot A$

überhaupt definiert sind und ausgeführt werden können? **Hinweis:** Anzahl von Spalten und Zeilen betrachten.

Für $C = A \cdot B$ → q=n, für $D = B \cdot A$ → p=m

c) Schreiben Sie für die Ausführungs-Bedingungen von b) die Matrix-Elemente von C und D in Kompaktform mit dem Summenzeichen $\sum_{i=1}^{?} \dots$ (→ griechisch „Sigma“ für „Summe“).

$$c_{ts} = \sum_{i=1}^{q} a_{ti} \cdot b_{is}, \quad t = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ m, \quad s = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ q \quad ,q=n$$

$$d_{st} = \sum_{i=1}^{p} b_{si} \cdot a_{it}, \quad t = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ p, \quad s = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ n \quad ,p=m$$

d) Lässt sich für q=n, m=p, $m \neq n$ die Reihenfolge bei $C = A \cdot B$ zu $C^{*} = B \cdot A$ vertauschen? Erklärung? → Nein, da $\text{Zeilenanzahl} \neq \text{Spaltenanzahl}$ → **nicht**-quadratischen Matrizen → Summe kann nicht vollständig ausgeführt werden.

e) Lässt sich für q=n, m=p, $m = n$ die Reihenfolge bei $C = A \cdot B$ zu $C^{**} = B \cdot A$ vertauschen? Erklärung? → Ja, da $\text{Zeilenanzahl} = \text{Spaltenanzahl}$ → quadratische Matrizen → Summe kann vollständig ausgeführt werden.

f) Sind die Ergebnisse für m = n bei $C = A \cdot B$ und $C^{***} = B \cdot A$ gleich? Erklärung? → Nein, die Summen unterscheiden sich → Multiplikation ist nicht kommutativ. **Triviale Ausnahme:** $B = A$.

Aufgabe 4 (Determinanten-Berechnung: Vertauschen von Zeilen)

Gegeben ist $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix}$.

a) Berechnen Sie det(A) → -12

b) Bilden Sie die Matrix A1 durch Vertauschen der Zeilen (I) und (III). Berechnen Sie det(A1).

$$A1 = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix} \rightarrow +12$$

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und b).

Vorzeichenwechsel, Betrag unverändert

d) Bilden Sie die Matrix A2 durch Vertauschen der Zeilen (I) und (II) von A1. Berechnen Sie det(A2).

$$A2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix} \rightarrow -12$$

e) Vergleichen Sie die Ergebnisse von b) und d).

Vorzeichenwechsel, Betrag unverändert

Allgemein: Jeder Tausch von je 2 Zeilen ergibt einen Vorzeichenwechsel.

Aufgabe 5 (Determinanten-Berechnung: Vertauschen von Spalten)

a) Bilden Sie die Matrix A3 durch Vertauschen der Spalten (II) und (III) in A von Aufgabe 4 und . berechnen Sie det(A3).

$$A3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow +12$$

b) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und 4a).

Vorzeichenwechsel, Betrag unverändert

Allgemein: Jeder Tausch von je 2 Zeilen oder je 2 Spalten ergibt einen Vorzeichenwechsel.

Aufgabe 6 (Determinanten-Berechnung: Addition einer Linearkombination von Zeilen zu einer anderen Zeile)

a) Bilden Sie aus der Matrix $\underline{A}$ von Aufgabe 4 die Matrix A4 durch Addition der Linearkombination „2 x Zeile (I) – 3 x Zeile (II)“ zu Zeile (III).

$$A4=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -12 & -14 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie det(A4) und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von 4a). → -12

Aufgabe 7 (Determinanten-Berechnung: Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor)

a) Multiplizieren Sie Zeile (II) von A aus Aufgabe 4 mit -5, berechnen Sie die Determinante und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von 4a). → +60

b) Multiplizieren Sie Spalte (III) von A aus Aufgabe 4 mit 7, berechnen Sie die Determinante und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von 4a). → -84

c) **Anwendung:** Bestimmen Sie die det(A), in dem Sie

- $\underline{A}$ in eine rechte obere Dreiecksmatrix umformen **und** dabei das Entstehen von Brüchen vermeiden, z. B. erst die Zeilen (II) und (III) mit 2 multiplizieren,

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \\ -2 & -10 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \\ (\mathrm{III}) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad A^{*}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 17 & -11 \\ 0 & -13 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \\ (\mathrm{III}) \end{matrix}$$

  Multiplikation von Zeile (III) mit 17 und Addition des 13-fachen von Zeile (II) →

$$A^{**}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 17 & -11 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} ,$$

- als Zwischenergebnis das Produkt der Hauptdiagonal-Elemente bilden,

$$\det\left(A^{**}\right) = -816 \quad ,$$

- das Zwischenergebnis zum richtigen Ergebnis korrigieren (Division durch die zuvor angewendeten Zeilen-Multiplikatoren):

$$\det(A) = -\frac{816}{2\cdot 2\cdot 17} = -12 \quad .$$

Aufgabe 8 (Determinanten-Rechnung zur Vorbereitung der Eigenwert-Bestimmung)

Gegeben ist die Matrix

$$D=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

a) Bilden Sie die die Matrix

$$E = D - \lambda \cdot I$$

mit der reellen Variablen λ und der (2 x 2)-Einheitsmatrix $\underline{I}$.

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 6 & -5-\lambda \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Gleichung $\det(\underline{E}) = 0$.

$$\det(E) = (2-\lambda)\cdot(-5-\lambda)-5\cdot 6 = \lambda^2+3\cdot\lambda-40 = 0$$

c) Lösen Sie den bei b) erhaltenen Ausdruck nach λ auf.

$$\lambda_1=-8 \quad , \quad \lambda_2=5$$

Hinweis: Allgemein heißen die Werte von λ „Eigenwerte" und spielen eine entscheidende Rolle bei der Schwingungsberechnung an mechanischen Konstruktionen und in elektrischen Netzwerken.

Aufgabe 9

Für ein elektrisches Widerstands-Netzwerk sind die 3 Maschengleichungen

$$1\cdot I_1 - 2\cdot I_2 + 3\cdot I_3 = 0$$
$$2\cdot I_1 + 1\cdot x_I - 4\cdot I_3 = 0$$
$$3\cdot I_1 - 1\cdot I_2 - 1\cdot I_3 = 0$$

für die 3 unbekannten Ströme $I_{1,}\ I_{2,}\ I_3$ gegeben.

a) Sind die Gleichungen linear unabhängig? →

LGS in Matrixform:

$$M\cdot I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\det(M)=0$, $\mathrm{Rang}(M)=2$ → nur 2 linear unabhängige Zeilen.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen. → Da $\det(M)=0$ und $b=0$ ist, liegt ein **homogenes** LGS vor. Es wird gelöst, in dem so viele unbekannte Ströme willkürlich auf einen festen Wert gesetzt werden, dass die verbleibende Anzahl unbekannter Ströme der Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen entspricht.

Da die rechte Seite 0 ist, reicht es, die Matrix M durch elementare Zeilenoperationen auf rechte obere Dreiecksform zu bringen:

$$M^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow M^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Z. B. kann man den zur letzten Spalte gehörenden Strom I_3 willkürlich auf den Wert $I_3=1\ [A]$ setzen, dann entsteht aus den 3 Gleichungen das **inhomogene** LGS zweiter Ordnung:

$$M\cdot I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow M^*\cdot I^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow M^{**}\cdot I^{**} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

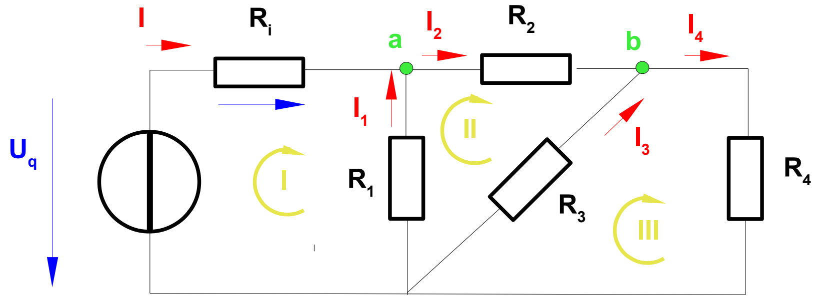
Lösung: $I=[1\,2\,1]^T$.

c) Was wurde bei der Aufstellung der 3 Gleichungen übersehen, damit das LGS eine eindeutige Lösung besitzt?

   Es wurde eine abhängige Maschengleichung mit aufgestellt → bei größeren Netzwerken kann das leicht passieren, ohne dass man es sofort bemerkt.

Aufgabe 10 (alles selbst lösen)

Gegeben ist das folgende Widerstandsnetzwerk



mit U_q = 100 V, R_i = 10 Ohm, R_1, ... R_4 = 100 Ohm.

a) Welche Ströme sind unbekannt?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kirchhoff'schen Maschen- und Knotengesetze die unbekannten Ströme. → LGS aufstellen, in Matrizendarstellung umformen und mit **Scilab** lösen.

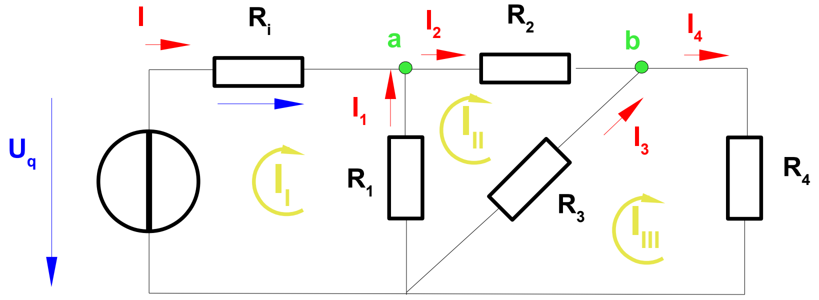
c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Maschenstromverfahrens die unbekannten Ströme. → LGS aufstellen, mit Scilab lösen.

Vorüberlegung zu b): Für die Berechnung der 5 unbekannten Ströme benötigt man 5 unabhängige Gleichungen. Dafür lassen sich 3 unabhängige Maschen I, II und III (Zählrichtungen sind willkürlich) sowie 2 unabhängige Knoten a und b bilden. Die 5 Gleichungen sind:

Aus KKG für a:	$I+I_1-I_2=0$	(1)
Aus KKG für b:	$I_2+I_3-I_4=0$	(2)
Aus KMG für I:	$-U_q+R_i\cdot I-R_1\cdot I_1=0$	(3)
Aus KMG für II:	$R_1\cdot I_1+R_2\cdot I_2-R_3\cdot I_3=0$	(4)
Aus KMG für III:	$R_3\cdot I_3+R_4\cdot I_4=0$	(5)

Damit ist der elektrotechnische Teil der Aufgabe vollständig formuliert, alles weitere besteht in der mathematischen Lösung des linearen Gleichungssystems (1) bis (5).

Vorüberlegung zu c): Es lassen sich 3 Maschenströme einführen:



Die 3 Maschengleichungen sind:

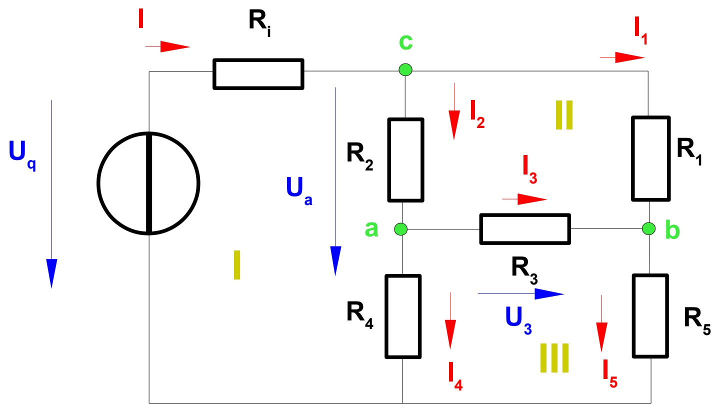
Masche I: $-U_q + R_i \cdot I_I + R1 \cdot I_I - R_1 \cdot I_{II} = 0$

Masche II: $-R_1 \cdot I_I + R_1 \cdot I_{II} + R_2 \cdot I_{II} + R_3 \cdot I_{II} - R_3 \cdot I_{III} = 0$

Masche III: $-R_3 \cdot I_{II} + R_3 \cdot I_{III} + R_4 \cdot I_{III} = 0$

Aufgabe 11 (als Dessert …)

Gegeben ist die folgende Brückenschaltung, wie Sie in der Elektrotechnik zur Messung unbekannter Widerstände (z.B. R_1) verwendet wird. Nutzbarer Effekt → mit einem veränderlichen Präzisionswiderstand R_2 Spannungsnull in der Brücke einstellen).



a) Stellen Sie das LGS auf.

a) Bestimmen Sie mit **Scilab** bei Vorgabe der Werte aus Aufgabe 10 die Lösung.

(Wurde bereits im Übungsblock gelöst)