

Mathematik 1 - Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (Logarithmen)

(a) Auf einem Prüfstand für PKW-Dieselmotoren wird die mittlere Schalleistung bei maximaler Drehzahl gemessen. Die Schalleistung P_A ist proportional zum Schalldruck p_A , also $P_A \sim p_A$. Als zulässig wird ein Höchstwert von 85 dB angesehen, bezogen auf die Hörschwelle 0 dB (= Schalleistung, die das Gehör bei gleitendem Anstieg erstmalig wahrnimmt). Der Referenzschalldruck für die Hörschwelle (siehe z. B. <http://de.wikipedia.org/wiki/H%C3%B6rschwelle>) wurde als Mittelwert auf der Grundlage vieler Einzelmessungen zu $p_{A0} = 20 \mu\text{Pascal}$ festgelegt. (Pascal = Einheit für den Druck = Kraft / Fläche)

Die Prüfstandsmessung zeigt für das aktuelle Motorexemplar einen Schalldruck von $p_{A1} = 1.26 \cdot 10^4 \text{Pascal}$ an. Besteht es die Prüfung?

(b) Im leeren Hörsaal 8/14 wird nach Ende der morgendlichen Rush Hour auf der Nibelungenallee ein mittlerer Schalldruck von 40 dB gemessen. Wie groß darf der Schalldruck $p_{A\text{max}}$ werden, damit im gefüllten Hörsaal 43 dB nicht überschritten werden?

(c) Welcher Schalldruck liegt in 8/14 bei 46 dB vor?

Aufgabe 2 (Logarithmen und logarithmische Achsensysteme)

Zur Überprüfung gemessener physikalischer Zusammenhänge (z. B. Weg $s(t)$ einer gleichmäßig beschleunigten Masse) oder zur Darstellung von Funktionen $f(x)$ über mehrere Zehnerpotenzen der unabhängigen Variablen x (z. B. Frequenzgang eines Verstärkers von 20 Hz bis 20000 Hz) sind statt der üblichen linear geteilten Achsen solche mit logarithmischer Skalierung vorteilhaft:

(a) Gegeben ist die Funktion $y = x^3$. Stellen Sie für $-2 \leq x \leq +2$ eine kleine Wertetabelle auf und skizzieren Sie grob den Graphen y (Tipp: Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe des **plot**-Befehls von Scilab).

Ergänzen Sie die Tabelle nun mit ein paar Werten im Bereich $0.1 \leq x \leq +10$, z. B. mit

$$x=0.1, \quad x = 0.5, \quad x = 1.0, \quad x = 10.0$$

berechnen Sie in zwei weiteren Spalten $z = \log_{10}(y) = \log_{10}(x^3)$ und $xs = \log_{10}(x)$, und stellen Sie den Graphen der Wertepaare (z, xs) in einem neuen Koordinatensystem mit z - und xs -Achse dar. Was lässt sich über die Steigung aussagen?

Tipp: Zur **Scilab**-Kontrolle eignet sich hier der Befehl **paramfplot2d(log(x),log(x^3),x)** für die sogenannte Parameter-Darstellung einer Funktion. Der Parameter für beide Achsen ist die Variable x .

(b) Gegeben ist die Funktion $y = 3 \cdot x^2$. Stellen Sie für $-1 \leq x \leq +2$ ähnlich wie bei (a) eine kleine Wertetabelle auf und skizzieren Sie wieder grob den Graphen. Ergänzen Sie die Tabelle für den Wertebereich $0.1 \leq x \leq +10$ mit $z = \log_{10}(y) = \log_{10}(3 \cdot x^2)$ und $xs = \log_{10}(x)$, und skizzieren Sie den Graphen mithilfe der Wertepaare (z, xs) . Wie wirken sich hier die beiden Parameter 3 und 2 aus? Betrachten Sie die Achsabschnitte und die Steigung. (**Scilab**-Kontrolle!)

Generell: Auch bei Grob-Skizzen immer vollständige Angaben machen, damit ein Dritter den Graphen richtig interpretieren kann → also Achsen beschriften und skalieren, Funktion angeben!

Aufgabe 3 (Wiederholung zu Polynomen)

Polynome sind mathematische Strukturen, die in der Ingenieurtechnik in sehr vielen Zusammenhängen erscheinen, z. B. bei der Lösung von Differentialgleichungen für mechanische oder elektrische Schwingungsvorgänge, als „Biegelinien“ der Verformung belasteter Balken, als Näherungsausdrücke für gemessene Kennlinien und weiteres. Daher werden Rechenoperationen an und mit Polynomen oft benötigt.

- (a) Von einem Polynom $u = f(v)$ sind alle beiden Nullstellen $v_1 = p$ und $v_2 = q$ bekannt. Geben Sie die beiden Linearfaktoren an.
- (b) Stellen Sie u in der Produktform der Linearfaktoren dar.
- (c) Stellen Sie u in der Summenform der v -Potenzen dar.
- (d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koeffizienten der Summenform und den Nullstellen?

Aufgabe 4 (Wiederholung zu Polynomen, Polynome ab Ordnung 2 sind auch nichtlineare Funktionen)

- (a) Von einem Polynom $y = f(x)$ sind mit $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$ alle Nullstellen bekannt, also $f(x_i) = 0$ usw. Stellen Sie $f(x)$ in der Produktform der Linearfaktoren dar.
- (b) Stellen Sie $f(x)$ in der Summenform der x -Potenzen dar.
- (c) Skizzieren Sie grob den Graphen $f(x)$ für $-4 \leq x \leq +3$ (Wertetabelle anlegen, Skizze vollständig beschriften, mit **Scilab** unter Verwendung des **plot**-Befehls kontrollieren).
- (d) Geben Sie die bei (b) berechneten 4 Koeffizientenwerte a_3 , a_2 , a_1 , a_0 der x -Potenzen mit dem **Scilab**-Befehl

roots([a₃, a₂, a₁, a₀])

in der **Scilab**-Konsole ein (Klammerstruktur beachten!) und führen Sie den Befehl aus. Ergebnis?

Aufgabe 5: (Nichtlineare Gleichungen)

Viele technische Zusammenhänge ergeben bei ihrer Beschreibung nichtlineare Funktionen, z. B. in der Elektrotechnik bei der Spannungsberechnung in Netzwerken mit Halbleiter-Elementen. Hier können die Nichtlinearitäten in der Gestalt von Exponential-Funktionen erscheinen. Einer der Gleichungstypen wäre etwa

$$U_k = f(I) = U_0 \cdot (e^{k \cdot I} - 1) - R \cdot I$$

mit U_k , $U_0 \rightarrow$ Spannungen, $I \rightarrow$ Strom, $R \rightarrow$ Widerstand, $k \rightarrow$ Halbleiter-Parameter.

- (a) Schreiben sie die nichtlineare Gleichung $f(I)$ für $U_0 = 2$ [Volt], $k = 0.5 \cdot \left[\frac{1}{\text{Ampere}} \right]$, $R = 2$ [Ohm] und lassen Sie dabei – ausnahmsweise – die physikalischen Dimensionen weg.
- (b) Skizzieren Sie grob in ein vollständig beschriftetes Koordinatensystem für $-0.5 \leq I \leq 3$ die Teilfunktionen

$$(e^{k \cdot l} - 1) \quad (I)$$

$$U_0 \cdot (e^{k \cdot l} - 1) \quad (II)$$

$$R \cdot I \quad (III)$$

Dabei zuerst nur Kopfrechnungen durchführen und e durch 3 annähern, danach zur Kontrolle exakt mit **Scilab** darstellen. Befehl **fsolve** verwenden!

(c) Bestimmen Sie nun die Lösung $U_k = f(l) = 0$, zuerst grob ohne Hilfsmittel, danach zur Kontrolle mit **Scilab**. (Tipp: Die Lösung ist der Schnittpunkt der Graphen zu (II) und (III), warum?)

Aufgabe 6 (Nichtlineare Gleichungen)

Bestimmen Sie die Lösung zu $f(x) = 2 \cdot e^{-x} - x^2 = 0$

(a) über eine grobe Kopfrechnung

(b) exakt mit **Scilab**, Befehl **fsolve**, Zum Gebrauch des Befehls über **help fsolve** nachsehen.