Mathematik 1 - Übungsblatt 9
Lösungsvorschläge

… und nicht vergessen: **Täglich einmal Scilab**

Aufgabe 1 (Logarithmen)

(a) Auf einem Prüfstand für PKW-Dieselmotoren wird die mittlere Schallleistung bei maximaler Drehzahl gemessen. Die Schallleistung P_A ist proportional zum Schalldruck p_A , also $P_A \sim p_A$. Als zulässig wird ein Höchstwert von 85 dB angesehen, bezogen auf die Hörschwelle 0 dB (= Schallleistung, die das Gehör bei gleitendem Anstieg erstmalig wahrnimmt). Der Referenzschalldruck für die Hörschwelle (siehe z. B. http://de.wikipedia.org/wiki/H%C3%B6rschwelle) wurde als Mittelwert auf der Grundlage vieler Einzelmessungen zu $p_{A0} = 20\,\mu\,\text{Pascal}$ festgelegt. (Pascal = Einheit für den Druck = Kraft / Fläche)

Die Prüfstandsmessung zeigt für das aktuelle Motorexemplar einen Schalldruck von $p_{A1} = 1.26 \cdot 10^4\,\text{Pascal}$ an. Besteht es die Prüfung?

„Bel“ ist ein logarithmisches Verhältnismaß zwei Zahlenwerte gleicher Dimension, z. B. von Leistungen

$$\text{Bel} = \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \quad .$$

P_0 dient als Referenzleistung, die geeignet festgelegt werden muss, P_1 ist die Leistung, die sich auf P_0 bezieht. Meistens verwendet man wegen der handlicheren Zahlen das Maß deziBel, abgekürzt dB:

$$\text{deziBel} = \text{dB} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \quad .$$

Da der Schalldruck proportional zur Schallleistung ist, $P_A = \text{const.} \cdot p_A$, kürzt sich im Quotienten die Konstante const. heraus und es ergibt sich

$$\text{deziBel} = \text{dB} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{p_{A1}}{p_{A0}}\right) \quad = \quad \text{dB} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1.26 \cdot 10^4}{20.0 \cdot 10^{-6}}\right) = 87.99 > 85 \quad .$$

Der Motor besteht die Prüfung nicht.

(b) Im leeren Hörsaal 8/14 wird nach Ende der morgendlichen Rush Hour auf der Nibelungenallee ein mittlerer Schalldruck von 40 dB gemessen. Wie groß darf der Schalldruck p_{Amax} werden, damit im gefüllten Hörsaal 43 dB nicht überschritten werden?

$$40\,[\text{dB}] = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{p_{A\ \text{morgen}}}{p_{A0}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{4}{10} = 4.0 = \log_{10}\left(\frac{p_{Amax}}{p_{A0}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{p_{A\ \text{morgen}}}{p_{A0}} = 10^4$$

$$p_{A\ \text{morgen}} = 10^4 \cdot p_{A0} = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 = 20 \cdot 10^{-2} = 0.2\,[\text{Pascal}]$$

$$43\,[\text{dB}] = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{p_{Amax}}{p_{A0}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{43}{10} = 4.3 = \log_{10}\left(\frac{p_{Amax}}{p_{A0}}\right)$$

$$p_{Amax} = 10^{4.3} \cdot p_{A0} = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{4.3} = 0.3991\,[\text{Pascal}]$$

Dies ist ungefähr das Doppelte von $p_{A\,morgen}$.

(c) Welcher Schalldruck liegt in 8/14 dann bei 46 dB vor?

$$p_{A46db} = 10^{4.6} \cdot p_{A0} = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{4.6} = 0.7962\,[\text{Pascal}]$$

Dies ist etwa das Doppelte von p_{Amax}.

Faustregel: Je 3 dB zusätzlich verdoppeln in etwa das Verhältnis.

Aufgabe 2 (Logarithmen)

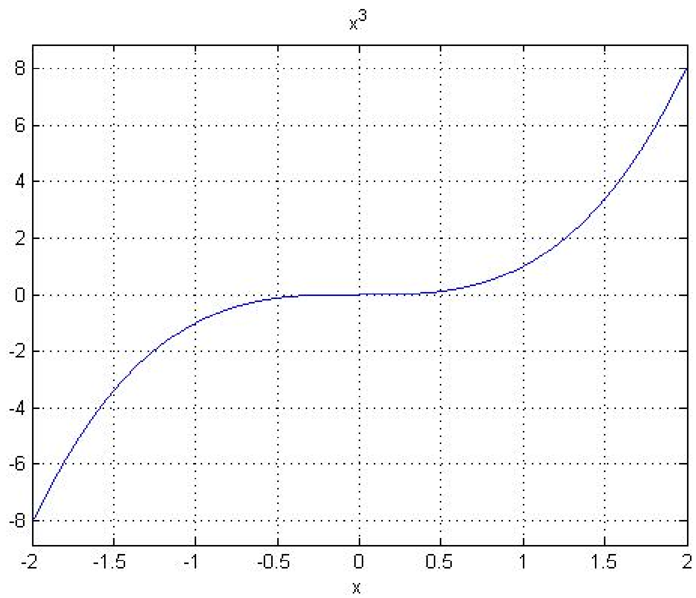
Zur Überprüfung gemessener physikalischer Zusammenhänge (z. B. Weg s(t) einer gleichmäßig beschleunigten Masse) oder zur Darstellung von Funktionen f(x) über mehrere Zehnerpotenzen der unabhängigen Variablen x (z. B. Frequenzgang eines Verstärkers von 20 Hz bis 20000 Hz) sind statt der üblichen linear geteilten Achsen solche mit logarithmischer Skalierung vorteilhaft:

(a) Gegeben ist die Funktion $y = x^3$. Stellen Sie für $-2 \le x \le +2$ eine kleine Wertetabelle auf und skizzieren Sie grob den Graphen y (Tipp: Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe des ***plot2d***-Befehls von **Scilab**).

Ein Rumpfprogramm mit Scilab könnte sein:

```
x=linspace(-2,2,1000);
plot2d(x,x.^3)
xgrid
```

Ergänzen Sie es mit den notwendigen Beschriftungen. Das Ergebnis kann so aussehen:



Ergänzen Sie die Tabelle nun mit ein paar Werten im Bereich $0.1 \le x \le +10$, z. B. mit

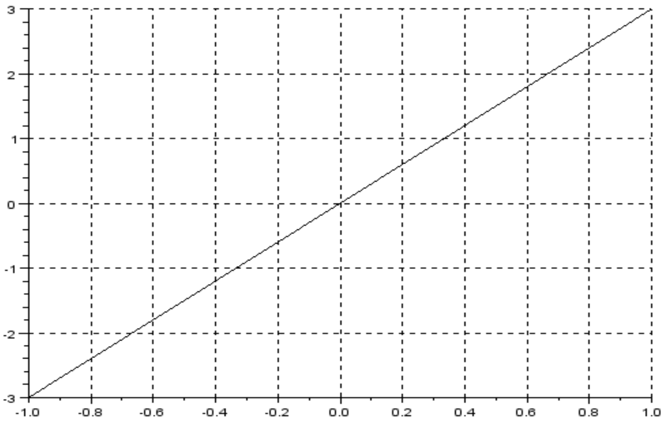
x=0.1,   x = 0.5,   x = 1.0,   x = 10.0

berechnen Sie in zwei weiteren Spalten $z = \log_{10}(y) = \log_{10}(x^3)$ und $xs = \log_{10}(x)$, und stellen Sie den Graphen der Wertepaare (z, xs) in einem neuen Koordinatensystem mit z- und xs-Achse dar. Was lässt sich über die Steigung aussagen?

Tipp: Zur **Scilab**-Kontrolle eignet sich im einfachsten Fall z. B. die Befehlsfolge

x=linspace(0.1,10,1000); xs=log10(x); z=log10(x.^3);plot2d(xs,z);xgrid

Ergebnis:



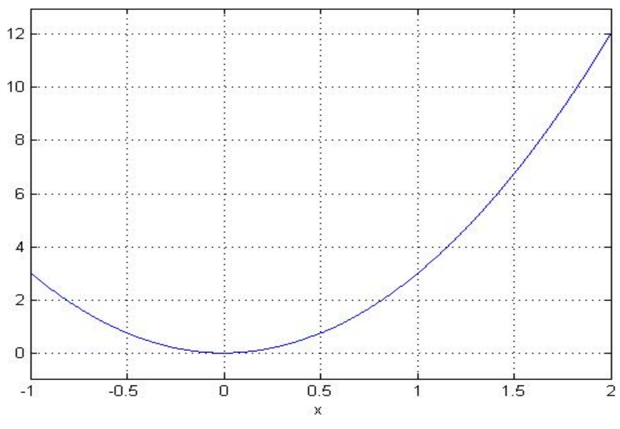
(Befehle für passende Achsenbeschriftung selbst ergänzen). Als Graphen erhält man eine Gerade durch den Ursprung mit der Steigung 3. Die Skalierung der Achsen zeigt die Exponenten der Zehnerpotenzen von x.

Die Gerade im z-xs-Koordinatensystem ergibt sich bei Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen aus

$$z = \log_{10}(y) = \log_{10}(x^3) = 3 \cdot \log_{10}(x) = 3 \cdot xs \quad .$$

Beachten Sie, dass sich der Wertebereich der horizontalen Achse von x=0.1 bis x = 10 erstreckt. Wie viel länger wird dann die xs-Achse, wenn x bis 100 reicht? Antwort: 50%, warum?

(b) Gegeben ist die Funktion $y = 3 \cdot x^2$. Stellen Sie für $-1 \le x \le +2$ ähnlich wie bei (a) eine kleine Wertetabelle auf und skizzieren Sie wieder grob den Graphen.

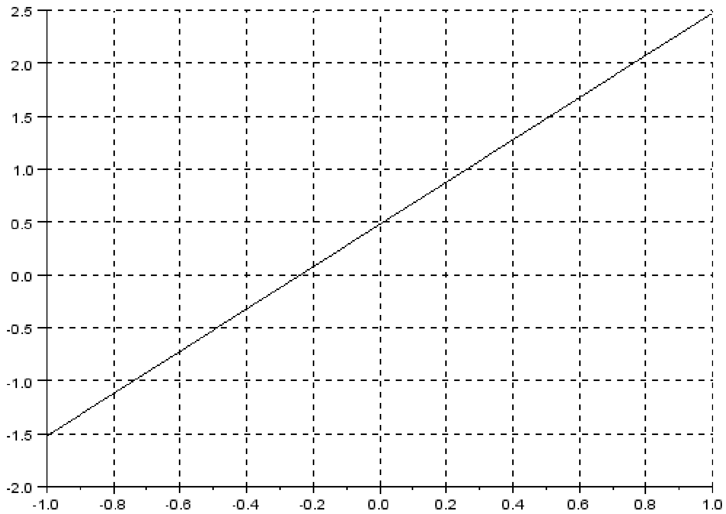


Ergänzen Sie die Tabelle für den Wertebereich $0.1 \le x \le +10$ mit $z = \log_{10}(y) = \log_{10}(3 \cdot x^2)$ und $xs = \log_{10}(x)$, und skizzieren Sie den Graphen mithilfe der Wertepaare (z, xs). Wie wirken sich hier die beiden Parameter 3 und 2 aus? Betrachten Sie die Achsabschnitte und die Steigung.

Zur **Scilab**-Kontrolle eignet sich im einfachsten Fall z. B. die Befehlsfolge

```
x=linspace(0.1,10,1000); xs=log10(x); z=log10(3*x.^2);plot2d(xs,z);xgrid
```

Ergebnis:



(Befehle für passende Achsenbeschriftung selbst ergänzen). Auch hier erhält man als Graphen eine Gerade, diesmal mit der Steigung 2 und dem Abschnitt ca. 0.5 auf der z-Achse im z-xs-Koordinatensystem. Die Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen ergibt

$$z = \log_{10}(y) = \log_{10}(3 \cdot x^2) = \log_{10} 3 + \log_{10}(x^2) = 0.477 + 2 \cdot \log_{10}(x) = 0.477 + 2 \cdot xs$$

Generell: Auch bei Grob-Skizzen immer vollständige Angaben machen, damit ein Dritter den Graphen richtig interpretieren kann $\rightarrow$ also Achsen beschriften und skalieren, Funktion angeben!

Aufgabe 3 (Polynome)

Polynome sind mathematische Strukturen, die in der Ingenieurtechnik in sehr vielen Zusammenhängen erscheinen, z. B. bei der Lösung von Differentialgleichungen für mechanische oder elektrische Schwingungsvorgänge, als „Biegelinien" der Verformung belasteter Balken, als Näherungsausdrücke für gemessene Kennlinien und weiteres. Daher werden Rechenoperationen an und mit Polynomen oft benötigt.

(a) Von einem Polynom u = f(v) sind alle beiden Nullstellen v_1 = p und v_2 = q bekannt. Geben Sie die beiden Linearfaktoren an.

$$(v-p) \quad \text{und} \quad (v-q)$$

(b) Stellen Sie u in der Produktform der Linearfaktoren dar. $u=(v-p)\cdot(v-q)$

(c) Stellen Sie u in der Summenform der v-Potenzen dar.

$$u=v^2-(p+q)\cdot v+p\cdot q=a_2\cdot v^2+a_1\cdot v+a_0$$

(d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koeffizienten der Summenform und den Nullstellen?

$$a_2=1 \quad , \quad a_1=-(p+q) \quad , \quad a_0=(-p)\cdot(-q)=p\cdot q$$

Aufgabe 4 (Polynome)

(a) Von einem Polynom y = f(x) sind mit $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$ alle Nullstellen bekannt, also $f(x_1) = 0$ usw. Stellen Sie f(x) in der Produktform der Linearfaktoren dar.

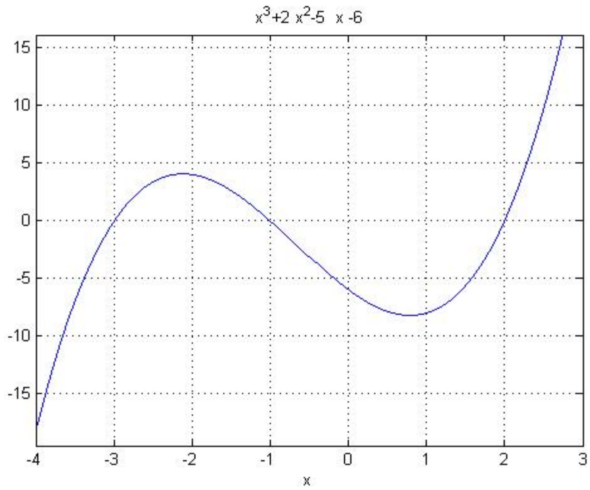
$$y \;=\; (x-(-1))\cdot(x-(+2))\cdot(x-(-3)) \;=\; (x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$$

(b) Stellen Sie f(x) in der Summenform der x-Potenzen dar.

$$y \;=\; x^3+2\cdot x^2-5\cdot x-6$$

Tipp: Schauen Sie im Anhang nach, wie Sie die symbolische Rechenfähigkeit von MATLAB für sich arbeiten lassen können.

(c) Skizzieren Sie grob den Graphen f(x) für $-4\le x\le +3$ (Wertetabelle anlegen, Skizze vollständig beschriften, mit **Scilab** kontrollieren).



(d) Geben Sie die bei (b) berechneten 4 Koeffizientenwerte a_3, a_2, a_1, a_0 der x-Potenzen mit dem **Scilab**-Befehl

roots([a_3, a_2, a_1, a_0])

in der **Scilab**-Konsole ein (Klammerstruktur beachten!) und führen Sie den Befehl aus. Ergebnis?

```
ans=
     2.000
    -3.000
    -1.000
```

Aufgabe 5 (Nichtlineare Gleichungen)

Viele technische Zusammenhänge ergeben bei ihrer Beschreibung nichtlineare Funktionen, z. B. in der Elektrotechnik bei der Spannungsberechnung in Netzwerken mit Halbleiter-Elementen. Hier können die Nichtlinearitäten in der Gestalt von Exponential-Funktionen erscheinen. Einer der Gleichungstypen wäre etwa

$$U_k = f(I) = U_0 \cdot (e^{k \cdot I} - 1) - R \cdot I$$

mit U_k, U_0 → Spannungen, I → Strom, R → Widerstand, k → Halbleiter-Parameter.

(a) Schreiben sie die nichtlineare Gleichung f(I) für U_0 = 2 [Volt], $k = 0.5 \cdot \left[\frac{1}{\text{Ampere}}\right]$, R = 2 [Ohm] und lassen Sie dabei – ausnahmsweise – die physikalischen Dimensionen weg.

$$U_k = f(I) = 2.0 \cdot (e^{0.5 \cdot I} - 1) - 2.0 \cdot I$$

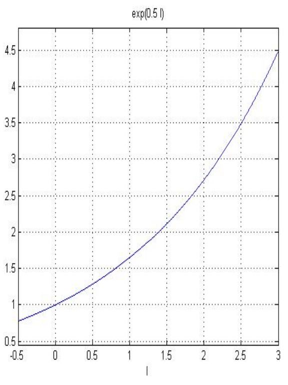
(b) Skizzieren Sie grob in ein vollständig beschriftetes Koordinatensystem für $-0.5 \leq I \leq 3$ die Teilfunktionen

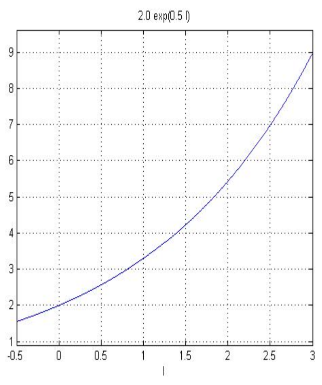
$(e^{k \cdot I} - 1)$ (I)

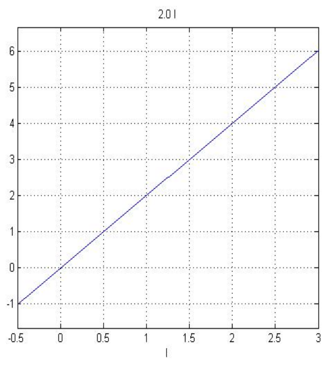
$U_0 \cdot (e^{k \cdot I} - 1)$ (II)

$R \cdot I$ (III)

Dabei zuerst nur Kopfrechnungen durchführen und e durch 3 annähern, danach zur Kontrolle exakt mit **Scilab** darstellen.

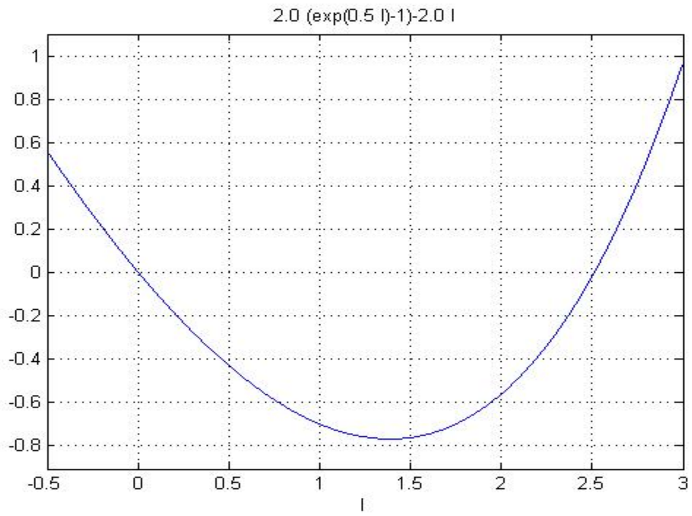






Skalierungen beachten!

(c) Bestimmen Sie nun die Lösung $U_k = f(I) = 0$, zuerst grob ohne Hilfsmittel, danach zur Kontrolle mit **Scilab** (Tipp: Die Lösung ist der Schnittpunkt der Graphen zu (II) und (III), warum?)



Es gibt 2 Lösungen:

- I=0 ist trivial → wenn kein Strom fließt, entsteht auch keine Spannung (das stimmt aber nur in diesem speziellen Fall!).
- I=2.5, exakter mit dem Gleichungslöser-Befehl

  deff('y=Uk(I)','2.0*(exp(0.5*I)-1)-2*I'); I=fsolve([0,3],Uk); I

  Ergebnis: I= 0 und I= 2.5129) .

Aufgabe 6 (Nichtlineare Gleichungen)

Bestimmen Sie die Lösung zu $f(x) = 2 \cdot e^{-x} - x^2 = 0$

(a) über eine grobe Kopfrechnung

Mit $e \approx 3$ erhalten wir $f(x) \approx 2 \cdot 3^{-x} - x^2 = \frac{2}{3^x} - x^2 = 0$

Für x = 1: $f(x) \approx \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

Für x = 0.9: $f(x) \approx \frac{2}{3^{0.9}} - 0.9^2 = -0.07$ → reicht als Näherung.

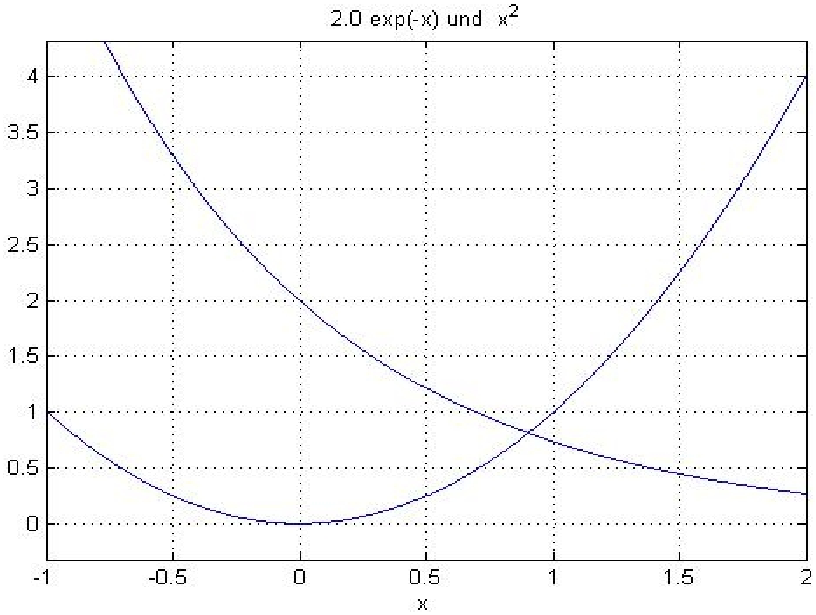
(b) exakt mit **Scilab**:

Geben Sie in der **Scilab**-Konsole den Befehl

deff('y=f(x)','y=2*exp(-x)-x^2'); x=fsolve([0,1],f); x

ein → x = 0.9012. Sie sehen, dass die Kopfrechnung bereits ein sehr brauchbares Ergebnis brachte.

Der Vektor [0,1] im Befehl gibt eine Werteumgebung vor, in der **Scilab** nach der Lösung suchen soll. Es könnte ja mehrere Lösungen geben. Probieren Sie andere Suchumgebungen. In diesen Fällen erhalten wir aber immer dieselbe Lösung. Das wird leichter übersehbar, wenn wir die beiden Teilgraphen in einem Koordinatensystem darstellen:



Der Schnittpunkt ist die Lösung, andere sind in diesem Fall nicht zu erwarten.