Mathematik 1 - Übungsblatt 10

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Gegeben: $y=2\cdot\sqrt{x}\cdot e^{-3\cdot\sqrt[3]{x}}$. Bestimmen Sie die Ableitung.

Produkt- und Kettenregel:

$$y'=2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{-3\cdot\sqrt[3]{x}}+\sqrt{x}\cdot e^{-3\cdot\sqrt[3]{x}}\cdot\left(-3\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)\right]$$ (selbst weiter vereinfachen):

Aufgabe 2

Ableitungen zu: $y=2\cdot\sqrt{x}\cdot e^{-3x}$, $y=e^{4\cdot\sqrt{x}}$, $y=e^{\frac{x^2}{1-x}}$

(Anwendung von Summenregel , Kettenregel und Quotientenregel)

$$y'=2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{-3x}+\sqrt{2}\cdot e^{-3x}\cdot(-3)\right]$$ (selbst weiter vereinfachen):

$$y'=e^{4\cdot\sqrt{x}}\cdot\left(4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$ (selbst weiter vereinfachen).

$$y'=e^{\frac{x^2}{1-x}}\cdot\frac{2x\cdot(1-x)-x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$ (selbst weiter vereinfachen).

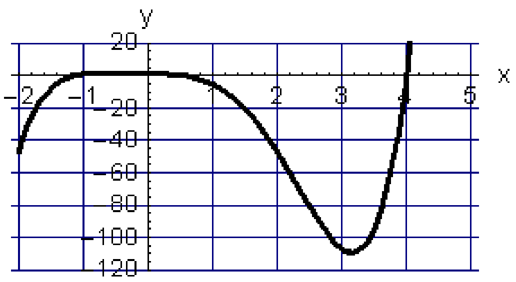
Aufgabe 3

Maxima, Minima, Wendepunkte, Sattelpunkte von

$$y=x^5-3x^4-4x^3+1$$

Zur Lösung:

Für einen ersten Überblick kann man sich die Funktion z. B. mit **Scilab** darstellen lassen:



Sie weist die 3 reellen Nullstellen (auch mit **Scilab**) x_1 = -1.13, x_2 = 0.57, x_3 = 3.99 auf (die restlichen beiden sind konjugiert komplexe Zahlen).

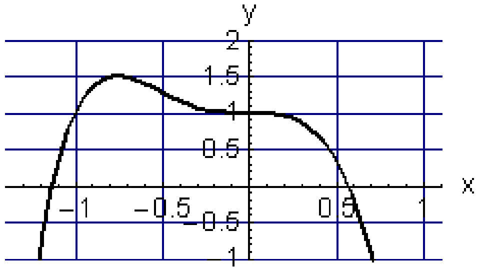
Die Extremwerte lassen sich aus

$$y'=5x^4-12x^3-12x^2=0$$

ermitteln. Die Nullstellen sind $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -0.76$, $x_4 = 3.16$.

Bei $x_3 = -0.76$ weist die Funktion ein Maximum auf.

Bei $x_{1,2} = 0$ befindet sich ein Sattelpunkt.Der „gezoomte“ Graph stellt dies dar:



Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Ableitungen $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ zu folgenden Funktionen

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$$

$$\rightarrow \quad f'(x) = \frac{1+\ln(x) - x\cdot\frac{1}{x}}{x^2} \;=\; \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$f(x) = \left(\tan(3x-\pi)\right)^2$$

$$\rightarrow \quad f'(x) = 2\cdot\tan(3x-\pi)\cdot\frac{1}{\left(\cos(3x-\pi)\right)^2}\cdot 3$$

oder, da $\tan(x)$ periodisch mit π ist:

$$\rightarrow \quad f'(x) = 6\cdot\tan(3x)\cdot\frac{1}{\left(\cos(3x)\right)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot e^{-a\cdot x^2}$$

$$\rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot e^{-a\cdot x^2}\cdot(-a\cdot 2x) \;=\; -2\sqrt{a}\cdot x\cdot e^{-a\cdot x^2}$$

und die Ableitungen $\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt}$ zu

$$u(t) \;=\; \hat{u}\cdot\cos(\omega\cdot t+\beta) \;=\; \hat{u}\cdot\left(\frac{e^{i\cdot(\omega t+\beta)}+e^{-i\cdot(\omega t+\beta)}}{2}\right) \quad , \; i,\; \hat{u},\; \omega,\; \beta \text{ sind Konstanten.}$$

$$\rightarrow \quad \dot{u}(t) = \hat{u}\cdot\left(\frac{i\cdot\omega\cdot e^{i\cdot(\omega t+\beta)} - i\cdot\omega\cdot e^{-i\cdot(\omega t+\beta)}}{2}\right) = -\hat{u}\cdot\omega\cdot\left(\frac{e^{i\cdot(\omega t+\beta)} - e^{-i\cdot(\omega t+\beta)}}{2i}\right) = -\hat{u}\cdot\omega\cdot\sin(\omega t+\beta)$$

$u(t)=U_0\cdot e^{-(a\cdot t)}\cdot\cos(\omega t-\gamma)$, U_0, ω, γ, a sind Konstanten.

$$\rightarrow\quad \dot{u}(t)=U_0\cdot\left[(-a)\cdot e^{-(a\cdot t)}\cdot\cos(\omega t-\gamma)-e^{-a\cdot t}\cdot(-\omega\sin(\omega\cdot t-\gamma))\right]$$

$$\rightarrow\quad \dot{u}(t)=-U_0\cdot e^{-at}\cdot\left[a\cdot\cos(\omega t-\gamma)+\omega\sin(\omega t-\gamma)\right]$$

Hinweis für Perfektionisten: Der Ausdruck in der eckigen Klammer lässt sich über trigonometrische Umformungen noch auf $\hat{A}\cdot\sin(\omega t-\gamma+\theta)$ bringen. Einfach mal versuchen ...

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion y = y(x).

a) Leiten Sie die Funktion $g(y)=\log_e(y)$ nach x ab.

$$\rightarrow\quad g'(y)=\frac{dg(y)}{dx}=\frac{dg(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\cdot y'$$

b) Leiten Sie die Funktion $y=\sqrt{x^3\cdot e^{4x}\sin(x)}$ nach x auf zweierlei Weise ab:

- Direkt unter Anwendung der Ableitungsregeln

$$y'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3\cdot e^{4x}\sin(x)}}\cdot\left(3\cdot x^2\cdot e^{4x}\cdot\sin(x)+x^3\cdot 4\cdot e^{4x}\sin(x)+x^3\cdot e^{4x}\cdot\cos(x)\right)$$

$$y'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3\cdot e^{4x}\sin(x)}}\cdot\left(\frac{3}{x}+4+\operatorname{cotan}(x)\right)\cdot x^3\cdot e^{4x}\cdot\sin(x)$$

$$y'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{x}+4+\operatorname{cotan}(x)\right)\cdot\sqrt{x^3\cdot e^{4x}\sin(x)}$$

- Nach Logarithmieren der Funktion $g(x)=\log_e(y)$ als Zwischenschritt. Hinweis: Hier erhalten Sie wie in a) einen Ausdruck, der die gesuchte Ableitung y'(x) enthält und nur noch entsprechend umgestellt werden muss.

$$g(y)=\log_e(y)=\frac{1}{2}\cdot\log_e\left(x^3\cdot e^{4x}\sin(x)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(3\log_e(x)+4x+\log_e(\sin(x))\right)$$

$$g'(y(x))=\frac{dg(y(x))}{dx}=\frac{1}{y}\cdot y'\quad\rightarrow\quad y'=y\cdot g'(y(x))\quad\text{(I)}$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{x}+4+\operatorname{cotan}(x)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{x}+4+\operatorname{cotan}(x)\right)$$

Mit (I):

$$y'=y\cdot g'(y(x))=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{x}+4+\operatorname{cotan}(x)\right)\cdot y=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{x}+4+\operatorname{cotan}(x)\right)\cdot\sqrt{x^3\cdot e^{4x}\sin(x)}$$

Aufgabe 6

Leiten Sie die Funktion $h=(2t+1)^{3t}$ nach t auf zweierlei Weise ab:

Direkt unter Anwendung der Ableitungsregeln

→ Diese Funktion ist vom Typ $g(t)=t^t$. Man formt solche Ausdrücke zunächst nach den Regeln für Umkehrfunktionen und den Regeln für Logarithmen von Potenzen um:

$g(t)=e^{\log_e(t^t)}=e^{t\cdot\log_e(t)}$, hier also $h(t)=(2t+1)^{3t}=e^{\log_e\left[(2t+1)^{3t}\right]}=e^{3t\cdot\log_e(2t+1)}$

Darauf lassen sich die Ableitungsregel für die Exponentialfunktion (erster Faktor) sowie die Produktregel für den Exponenten (eckige Klammer) anwenden:

$$\dot{h}(t)=e^{3t\cdot\log_e(2t+1)}\cdot\left[3\cdot\left(\log_e(2t+1)+t\cdot\frac{1}{2t+1}\cdot 2\right)\right]=(2t+1)^{3t}\cdot\left[3\cdot\log_e(2t+1)+\frac{6t}{2t+1}\right]$$

Allgemein gilt

$$f(x)=x^x \quad\rightarrow\quad f'(x)=x^x\cdot(\log_e(x)+1)$$

oder noch allgemeiner

$$f(x)=u(x)^{v(x)} \quad\rightarrow\quad f'(x)=u(x)^{v(x)}\cdot\left(v'(x)\cdot\log_e(u(x))+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

- Nach Logarithmieren der Funktion $g(t)=\ln(h)$ als Zwischenschritt.

  Erst wird h(t) logarithmiert

  $$g(h(t))=\log_e(h(t))=v(t)\cdot\log(u(t))=3t\cdot\log_e(2t+1)$$

  und g nach t abgeleitet

  $$\dot{g}(h(t))=3\cdot\log_e(2t+1)+3t\cdot\frac{2}{2t+1}=3\cdot\log_e(2t+1)+\frac{6t}{2t+1} \quad .$$

  Wegen $\dot{g}(t)=\frac{1}{h(t)}\cdot\dot{h}(t)$ erhält man $\dot{h}(t)=\dot{g}(t)\cdot h(t)=\left[3\cdot\log_e(2t+1)+\frac{6t}{2t+1}\right]\cdot(2t+1)^{3t}$.

  Frage: Welche Wege erscheinen Ihnen bei den Aufgaben 5 und 6 einfacher?

Aufgabe 7

Gegeben ist die Zeitfunktion x = x(t). Sie ist mit ihrer zeitlichen Ableitung $\dot{x}=\dot{x}(t)$ über die Gleichung

$$T_1\cdot\dot{x}+x=0$$

verknüpft. T_1 ist eine Konstante. Ermittelt werden soll ein Funktionsausdruck x(t), der die Gleichung für alle $t\geq 0$ erfüllt.

a) Zeigen Sie, dass sich der Ansatz $x(t)=e^{k\cdot t}$ mit der zunächst unbekannten Konstanten k grundsätzlich hierfür eignet.

→ $\dot{x}(t)=k\cdot e^{k\cdot t}$, die Ableitung enthält bis auf eine Konstante k wieder die Funktion x(t),

damit wird $T_1\cdot\dot{x}+x=0$ → $T_1\cdot k\,\dot{e}^{kt}+e^{kt}=(T_1\cdot k+1)\cdot e^{kt}=0$ prinzipiell lösbar, da man e^{kt} unter einer bestimmten Voraussetzung heraus kürzen kann und eine auflösbare Gleichung übrig bleibt.

Soweit $e^{k \cdot t} \neq 0$ ist, kann die Gleichung hierdurch dividiert werden.

a) Zeigen Sie, dass dies für alle $t \geq 0$ erfüllt ist und führen Sie die Division aus.

→ für $0 \leq t < \infty$ ist $x(t) = e^{k \cdot t} > 0$

$$\frac{(T_1 \cdot k + 1) \cdot e^{kt}}{e^{kt}} = T_1 \cdot k + 1 = 0$$

b) Welche Bedingung ergibt sich für k?

$$k = -\frac{1}{T_1}$$

c) Geben Sie nun die Funktion x(t) an.

→ $x(t) = e^{-\frac{t}{T_1}}$

Congratulations: Sie haben Ihre vermutlich erste Differenzialgleichung gelöst!

Aufgabe 8 (Extremwertbestimmung)

Gegeben ist eine Ersatzstromquelle mit dem eingeprägten Strom I_0 und dem ohmschen Innenwiderstand R_i. An diese Quelle soll ein ohmscher Verbraucher R_v angeschlossen und so dimensioniert werden, dass er die maximale elektrische Leistung $P_v = P_v(R_v) = P_{vmax}$ entnimmt. Nach den Gesetzen der Elektrotechnik berechnet sich die Leistung aus

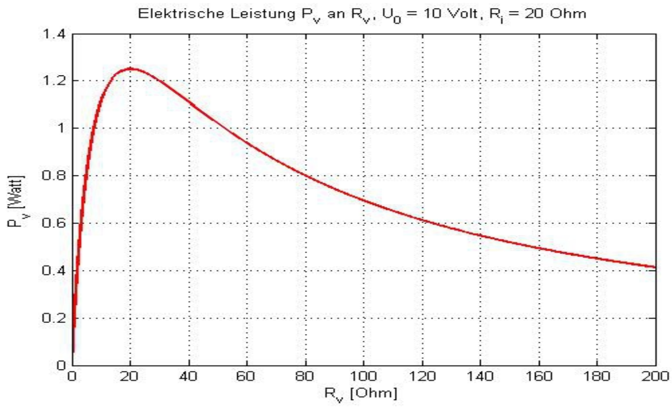
$$P_v = P_v(R_v) = I_v^2 \cdot R_v = I_0^2 \cdot R_i^2 \cdot \frac{R_v}{(R_i + R_v)^2}$$

a) Welche Leistungen ergeben sich für $R_v = 0$ (Kurzschluss) und $R_v \to \infty$ (Leerlauf)?

$P_v(R_v = 0) = 0$, $P_v(R_v \to 0) \to 0$

b) Skizzieren Sie grob den Verlauf $P_v = P_v(R_v)$.

→ Wieder gilt: Unbedingt von Hand durchführen! Nur Zur Kontrolle **Scilab** einsetzen:



c) Da die Leistung stetig verläuft und nicht negativ werden kann, muss zwischen beiden Werten von R_v ein Maximum von P_v liegen. Dieses ist durch eine horizontale Tangente an $P_v = P_v(R_v)$ gekennzeichnet. Ermitteln Sie Ort und Größe dieses Maximums allgemein und für

$I_0=10[A],\ R_i=20[\Omega]$.

Kontrollfrage: Was folgt aus der Aussage „horizontale Tangente“ für den Wert der Ableitung?

$$\rightarrow \quad \frac{dP_v}{P_v}=U_0^2\cdot\frac{(R_i+R_v)^2-R_v\cdot 2\cdot(R_i+R_v)}{(R_i+R_v)^4}=0 \quad !$$

Wegen $R_i>0$ ist auch $(R_i+R_v)>0$ und der obige Ausdruck kann gekürzt werden:

$$\frac{dP_v}{P_v}=U_0^2\cdot\frac{(R_i+R_v)-2\cdot R_v}{(R_i+R_v)^3}=0 \quad .$$

Die Ableitung wird 0, wenn der Zähler 0 ist. Das wird für $R_v=R_i$ der Fall, $R_v=20[\Omega]$. Die der Quelle maximal entnehmbare Leistung ist also

$$P_{vmax}=P_v(R_i)=U_0^2\cdot\frac{R_i}{(R_i+R_i)^2}=\frac{U_0^2}{4\cdot R_i}=\frac{100}{80}[Watt]=1.25[Watt]$$

Technisch bemerkenswert: In der Quelle wird die gleiche Leistung erzeugt wie am Verbraucher.

Aufgabe 9 (l'Hospital-Regel)

Beseitigen Sie die Unbestimmtheitsstellen

a) bei x= 0 in $y=\frac{\sin(x)}{x}$.

$y(0) \rightarrow \frac{0}{0}$ **unbestimmt!**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1}=1$$

b) bei x=0 in $y=\frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(x))}$

$y(0) \rightarrow \frac{-\infty}{-\infty}$ **unbestimmt!**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cdot\cos(2x)}{\sin(2x)}}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cot an(2x)}{\cot an(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \textbf{unbestimmt!}$$

Die l'Hospitalregel muss nochmals angewendet werden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cot an(2x)}{\cot an(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{-1}{[\sin(2x)]^2}}{\frac{-1}{[\sin(x)]^2}} = \lim_{x\to 0}2\cdot\frac{[\sin(x)]^2}{[\sin(2x)]^2} = \lim_{x\to 0}2\cdot\frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{2\cdot\sin(2x)\cdot\cos(2x)} = \lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin(2x)}{\sin(4x)}$$

$$\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin(2x)}{\sin(4x)} = \frac{0}{0} \quad \textbf{unbestimmt!}$$

… und nochmal:

$$\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin(2x)}{\sin(4x)} = \lim_{x\to 0}2\cdot\frac{2\cdot\cos(2x)}{4\cdot\cos(4x)} = \frac{1}{1} = 1$$

c) bei $x=\frac{\pi}{2}$ in $y=(\pi-2x)\cdot\tan(x)$

$y(\frac{\pi}{2}) \rightarrow 0\cdot\infty$ **unbestimmt!**

Umwandeln in:

$y=\frac{\tan(x)}{\frac{1}{(\pi-2x)}} \rightarrow y(\frac{\pi}{2}) \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ **unbestimmt!** (selbst durchführen)

d) bei x=1 in $y=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}$

$y(1)=\infty-\infty$ **unbestimmt!**

Umformen in $y=\frac{x\cdot\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\cdot\ln(x)} \rightarrow y(1)=\frac{0}{0}$ **unbestimmt!**

(selbst durchführen, Ergebnis → $\frac{1}{2}$).

e) bei x=0 in $y=x^x$

$y(0)\rightarrow 0^0$ **unbestimmt!**

Hier hilft es, den Wert von $Y=\ln(x^x)=x\cdot\ln(x)$ zu betrachten. Dann wird

$Y=\ln(x^x)=0\cdot\ln(0)\rightarrow 0\cdot-\infty$ **ebenfalls unbestimmt!**

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x)=0$$ b**estimmt!**

Die Funktion Y (nicht y) hat also für x=0 den bestimmten Wert $Y(0)=0$ an. Gefragt ist allerdings $y(0)$. Wegen $y=e^Y \rightarrow y(0)=e^Y(0)=1$ **bestimmt!**

Aufgabe 10 (Reihenentwicklung)

Entwickeln Sie die Funktion $y=\sin(x)$ bis zur 7-ten Potenz in eine Taylorreihe um die Punkte

a) $x=0$

$$y(x)=\frac{y(0)}{0!}+\frac{y'(0)}{1!}\cdot(x-0)+\frac{y''(0)}{2!}\cdot(x-0)^2+\frac{y'''(0)}{3!}\cdot(x-0)^3+...$$

$$y(x)=\sin(0)+\frac{\cos(0)}{1!}\cdot x+\frac{-\sin(0)}{2!}\cdot x^2-\frac{\cos(0)}{3!}\cdot x^3+...$$

$y(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$ (Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem aus einer Formelsammlung)

b) $x=\frac{\pi}{3}$

$y(x)=\frac{y(\frac{\pi}{3})}{0!}+\frac{y'(\frac{\pi}{3})}{1!}\cdot(x-\frac{\pi}{3})+\frac{y''(\frac{\pi}{3})}{2!}\cdot(x-\frac{\pi}{3})^2+\frac{y'''(\frac{\pi}{3})}{3!}\cdot(x-\frac{\pi}{3})^3+...$ (selbst weiterführen)

Aufgabe 11 (Reihenentwicklung)

Entwickeln Sie die Funktion $y=\arctan(x)$ bis zur 5-ten Potenz in eine Taylorreihe um die Punkte

a) $x=0$ (selbst durchführen, Ergebnis: $y(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...$)

b) $x=\frac{\pi}{4}$ (selbst durchführen)