Mathematik 1 - Übungsblatt 11

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (komplexe Zahlen)

Gegeben sind folgende komplexe Zahlen in der Darstellung als **Normalform** mit Real- und Imaginärteil $z=x+i\cdot y$ - oder wegen der Vertauschbarkeit von i und y auch $z=x+y\cdot i$:

$$z_1=i\cdot(-1.5)=-1.5\cdot i \quad , \quad z_2=2 \quad , \quad z_3=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i \quad , \quad z_4=\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i$$

$$z_5=-2+i\cdot(-3)=-2-3\cdot i \quad , \quad z_6=-2+3\cdot i \quad , \quad z_7=-1.5 \quad , \quad z_8=1.5\cdot i$$

a) Tragen Sie die Zeiger dieser Zahlen in die komplexe Zahlenebene ein. → Selbst durchführen

b) Bestimmen Sie die Länge $|z|$ der Zeiger und ihre Winkel ϕ (= Argumente) zur positiv reellen Achse.

$$|z_1|=1.5,\ \phi=+270° \text{ oder } \phi=-90°$$

$$|z_2|=2,\ \phi=0°$$

$$|z_3|=\sqrt{(\mathrm{Re}(z_3))^2+(\mathrm{Im}(z_3))^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2,\ \phi=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z_3)}{\mathrm{Re}(z_3)}\right)=45°$$

$$|z_5|=\sqrt{13} \quad \phi=-123.7°$$

Rest: → Selbst rechnen

c) Stellen Sie die Zahlen in Polarform (trigonometrische Form) dar $z=r\cdot(\cos(\phi)+i\cdot\sin(\phi))$, $r=|z|$.

$$z_1=1.5\cdot(\cos(-90°)+i\cdot\sin(-90°))$$

$$z_2=2\cdot(\cos(0°)+i\cdot\sin(0°))$$

$$z_3=2\cdot(\cos(45°)+i\cdot\sin(45°))$$

$$z_4=2\cdot(\cos(-45°)+i\cdot\sin(-45°))$$

Rest: → Selbst rechnen

d) Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede fallen Ihnen bei den Zahlen z_1, z_7 und z_8 auf?

→ Gleiche Beträge, verschiedene Winkel (= Vielfache von 90°)

e) Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede zeigen z_3, z_4 bzw. z_5, z_6?

→ Jedes Paar hat den gleichen Betrag, die Winkel sind gleich groß, haben aber unterschiedliche Vorzeichen.

f) Stellen Sie die Zahlen in Exponentialform $z=r\cdot e^{i\cdot\phi}$ dar.

$$z_1=1.5\cdot e^{+270°\cdot i}=1.5\cdot e^{-90°\cdot i}$$

$$z_2=2\cdot e^{0°\cdot i}$$

$$z_3=2\cdot e^{45°\cdot i}$$

Rest: → Selbst rechnen

Aufgabe 2 (komplexe Zahlen in verschiedenen Darstellungen)

Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_9 = 5 \cdot e^{i \cdot 30°} \quad , \quad z_{10} = -3.2 \cdot e^{i \cdot (-210°)} \quad , \quad z_{11} = e^{i \cdot 180°} \quad , \quad z_{12} = e^{i \cdot \pi} \quad ,$$

$$z_{13} = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \quad , \quad z_{14} = -3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

a) Tragen Sie die Zahlen in die komplexe Ebene ein. → Selbst machen

b) Stellen Sie die Zahlen in den beiden anderen Formen dar.

$$z_9 = 5 \cdot e^{i \cdot 30°} = 5 \cdot (\cos(30°) + i \cdot \sin(30°)) = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot i \;=\; 4.33 + 2.5 \cdot i$$

c) Was fällt Ihnen bei z_{11} und z_{12} auf?

$$z_{11} = e^{i \cdot 180°} = -1 \quad , \quad z_{12} = e^{i \cdot \pi} = -1$$

Merkwürdig ist, dass hier zwei transzendente und eine imaginäre Zahl zu einer Ganzzahl verknüpft werden und sich damit ein (bisher wohl nicht aufgeklärter) Zusammenhang offenbart.

d) Mit welcher einfachen Maßnahme kann man das Minuszeichen vor den Beträgen in z_{10} und z_{14} beseitigen?

Siehe c):

$$z_{10} = -3.2 \cdot e^{i \cdot (-210°)} = (-1) \cdot 3.2 \cdot e^{i \cdot (-210°)} = 1 \cdot e^{180° \cdot i} \cdot 3.2 \cdot e^{i \cdot (-210°)} = 3.2 \cdot e^{i \cdot (-210° + 180°)} = 3.2 \cdot e^{i \cdot (-30°)}$$

Aufgabe 3 (imaginäre Einheit)

a) Stellen Sie die Potenzen $i^1 = i,\ i^2 = i \cdot i,\ i^3,\ i^4,\ i^{5,}\ i^6,\ i^7,\ i^8$ in der Exponentialform dar. **Hinweis:** $i \;=\; \sqrt{-1}$. Was ergibt dann die Auswertung von i^2 usw.

$$i^1 = i,\ i^2 = i \cdot i = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 * i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = +1,\ i^5 = i^4 \cdot i = i,\ i^6 = i^2 = -1,\ \text{usw.}$$

b) Was ist i^{-1} ?

$$i^{-1} = \frac{1}{i}$$

c) Durch welche Maßnahme können Sie die gebrochene Darstellung von i^{-1} vermeiden? (Betrachten Sie i^2)

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{(-1)} = -i$$

Aufgabe 4 (Vorbereitung der Grundrechen-Operationen mit komplexen Zahlen)

Gegeben sind 2 komplexe Zahlen $z_1 = a + i \cdot b = 3 + 4i \quad , \quad z_2 = c + i \cdot d = -2 + i \quad .$

Da Real- und Imaginärteile zu verschiedenen Mengen gehören, dürfen Sie bei Addition und Subtraktion nur getrennt nach Real- und Imaginärteilen zusammen gefasst werden. Dies ist ähnlich der komponentenweisen Addition und Subtraktion von Vektoren.

Die Multiplikation erfolgt nach dem Distributivgesetz durch paarweise Multiplikation aller Elemente und der Addition der Paare, wiederum getrennt nach Real- und Imaginärteilen. Hier besteht **keine Ähnlichkeit** zu Vektor-Operationen!

a) Addieren Sie $z_3 = z_1 + z_2$ allgemein und mit den gegebenen Werten.

$$z_3 = z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d) \cdot i = 1 + 5i$$

b) Multiplizieren Sie $z_4 = z_1 \cdot z_2$ allgemein und fassen Sie das Ergebnis so zusammen, dass z_4 in der Normalform erscheint. **Hinweis:** Verwenden Sie die Erkenntnisse aus Aufgabe 3.

$$z_4 = z_1 \cdot z_2 = a \cdot c + a \cdot d \cdot i + i \cdot b \cdot c + i \cdot b \cdot i \cdot d = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$$

c) Bilden Sie z_4 mit den gegebenen Werten.

$$z_4 = -10 - 5 \cdot i$$

d) Führen Sie die Multiplikation in der Exponentialform durch. Verwenden Sie dabei die Rechenregeln für Produkte von Potenzen zur gleichen Basis. Was fällt Ihnen auf beim Winkel des Ergebnisses auf?

$$|z_4| = \sqrt{5} \cdot 5, \quad \phi = 53.1° + 153.4° = 206{,}5° = -153.4°$$

e) Mit welcher Form ist die Division einfacher durchzuführen?

Mit der Exponentialform, da hiermit nur

- die Beträge multipliziert
- die Winkel addiert

werden müssen.

Aufgabe 5 (konjugiert komplexe Zahlen)

Die zu z konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ hat den gleichen Realteil, aber den negativen Imaginärteil von z.

a) Bilden Sie $\bar{z}_1$ zu z_1 allgemein und mit den Werten aus Aufgabe 4.

$$\bar{z}_1 = a - i \cdot b = 3 - 4i$$

b) Tragen Sie die Zeiger von z_1 und $\bar{z}_1$ in die komplexe Zahlenebene ein. Was fällt Ihnen auf?

→ Selber machen, $\bar{z}_1$ liegt **spiegelsymmetrisch** zur reellen Achse.

c) Berechnen Sie $|z_1|$ und $|\bar{z}_1|$. Was fällt Ihnen auf?

→ Gleiche Beträge

d) Berechnen Sie $z_4 = z_1 \cdot \bar{z}_1$ und $z_5 = \sqrt{z_1 \cdot \bar{z}_1}$. Was fällt Ihnen im Vergleich zu c) auf?

$$z_4 = z_1 \cdot \bar{z}_1 = 25 \quad , \quad z_5 = \sqrt{z_1 \cdot \bar{z}_1} = 5 \quad \rightarrow \quad z_4 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \text{ ist Quadrat von } |z_1| \quad .$$

Aufgabe 6 (Division von komplexen Zahlen)

a) Führen Sie die Division $z_6 = \frac{z_1}{z_2}$ der beiden komplexen Zahlen aus Aufgabe 4 so durch, dass im Nenner nur reelle Größen stehen. **Hinweis:** Versuchen Sie Zähler und Nenner mit $\bar{z}_2$ zu multiplizieren.

$$z_6 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{-2 - 11 \cdot i}{5} = -\frac{2}{5} - \frac{11}{5} \cdot i$$

b) Führen Sie die Division unter Verwendung der Exponentialformen durch. Was fällt Ihnen bei

Betrag und Winkel des Ergebnisses auf?

$$z_6 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot e^{(53.1° - 153.4°) \cdot i} = \sqrt{5} \cdot e^{-110.3° \cdot i}$$

c) Welche Form eignet sich besser zur Division?

→ Die Exponentialform, da nur die Beträge dividiert und die Winkel subtrahiert werden müssen.

Aufgabe 7 (zum Entspannen)

Berechnen Sie die Nullstellen der Polynome

$$f_1(x) = 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 5 = 0 \quad \text{und} \qquad f_2(x) = -x^2 + 2 \cdot x - 17 = 0 \quad .$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2} \cdot i \qquad\qquad x_{1,2} = 1 \pm 4 \cdot i$$

Aufgabe 8 (Ortskurven)

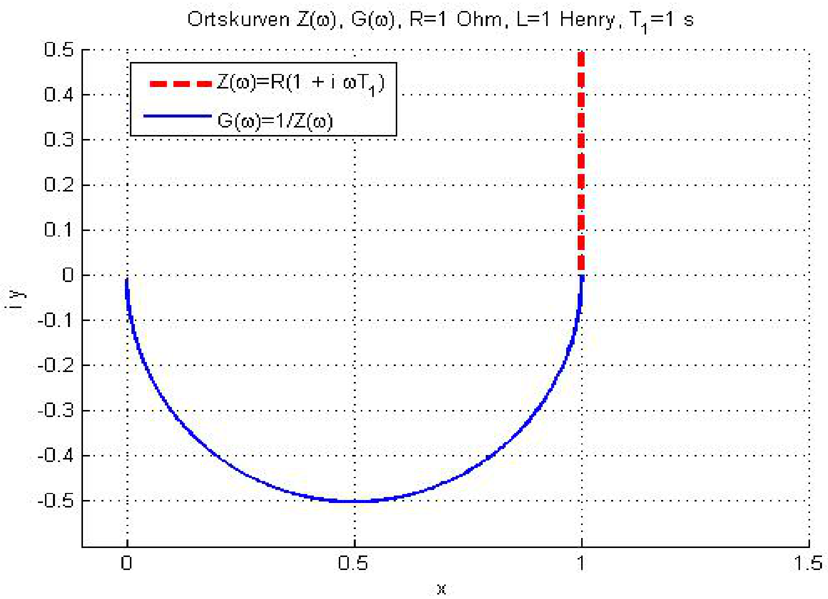
In der Nachrichten- und Regelungstechnik muss oft untersucht werden, wie sich bei Wechselstrom-netzwerken (Filter, Reglerbausteine, ...) Betrag und Phasenwinkel in Abhängigkeit von der (Kreis-) Frequenz $\omega = 2\pi f$ verändern. Sehr übersichtliche Ergebnisse erhält man in Form der **Ortskurven**. Diese stellen den Verlauf der Spitze eines komplexen Zeigers als Funktion von ω dar.

Gegeben ist der komplexe Wechselstrom-Widerstand

$$\tilde{Z} = R + i\omega L = R \cdot \left(1 + i \cdot \omega \frac{L}{R}\right) = R \cdot (1 + i \cdot \omega \cdot T_1) \quad \text{mit festem ohmschen und induktiven Anteil.}$$

a) Wie sieht der Graph $\tilde{Z}(\omega)$ in der komplexen Widerstandsebene aus, wenn die Frequenz den Wertebereich $0 < \omega < +\infty$ durchläuft? Tragen Sie den Graphen für allgemeine Werte R und L sowie für $R = 1[\Omega]$ und $L = 1[H]$ ein.

Mit **Scilab** erzeugt (man kann es aber auch für ein paar Werte von ω selbst skizzieren):



b) Zeigen Sie, dass die Ortskurve des komplexen Leitwerts

$$\tilde{G}=\frac{1}{\tilde{Z}}=\frac{1}{R+i\omega L}=\frac{1}{R\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T_1)}$$

einen unter der reellen Achse „hängenden“ Halbkreis bildet. Der Graph $\tilde{Z}(\omega)$ wird dabei in den Graphen $\tilde{G}(\omega)$ abgebildet.

Hinweis: Eine Kreisform oder den Ausschnitt aus einer Kreisform komplexer Zeigergrößen erkennt man am einfachsten, wenn sich ihre Exponentialform als

$$r_a\cdot e^{i\cdot\phi} \quad , \quad r_a=\text{const.}$$

darstellen lässt. Der Betrag von $\tilde{G}(\omega)$ ist aber nicht unabhängig von ω und daher nicht konstant. Man muss versuchen, $\tilde{G}(\omega)$ so zu verändern, dass Halbkreisform und Radius erhalten bleiben, aber das Merkmal des Kreisausschnitts leicht erkennbar wird. Dabei können folgende Teilschritte helfen:

c) Ermitteln Sie für einen ersten Eindruck Betrag und Winkel von

$$\tilde{G}(\omega=0) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R}$$

$$\tilde{G}(\omega\rightarrow\infty) \quad \rightarrow \quad 0$$

$$\tilde{G}(\omega=\frac{1}{T_1}) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{1+i\cdot 1}$$

und tragen Sie die Zeiger in die $\tilde{G}(\omega)$ - Ebene ein. (selbst durchführen)

d) Geben Sie den Radius r_a des Halbkreises an. → $r_a=\frac{1}{2\cdot R}$

e) Wo liegt der Mittelpunkt ? → Im Punkt $\frac{1}{2\cdot R}$, also auf der reellen Achse.

f) Stellen Sie $\tilde{G}(\omega)$ in Polarform dar und ziehen Sie vom Realteil den Radius r_a ab:

$$\tilde{G}'(\omega)=\tilde{G}-r_a \quad .$$

$$\tilde{G}(\omega)=\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot T_1)^2}}\cdot(\cos(\phi)-i\cdot\sin(\phi))$$

$$\phi=\arctan(\omega T_1)$$

$$\tilde{G}'(\omega)=\tilde{G}-r_a=\left[\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot T_1)^2}}\cdot\cos(\phi)-\frac{1}{2R}\right]-i\cdot\left[\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot T_1)^2}}\cdot\sin(\phi)\right] \quad \text{)I)}$$

g) Bestimmen Sie den Betrag von $\tilde{G}'(\omega)$. Er sollte von ω unabhängig sein.

$$\rightarrow \quad |\tilde{G}'(\omega)|=\frac{1}{2R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot T_1)^2}}\cdot\sqrt{\left(2\cdot\cos(\phi)-\sqrt{1+(\omega T_1)}\right)^2+(2\cdot\sin(\phi))^2}$$

Mit $\phi=\arctan(\omega T_1)=\arccos(\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}})=\arcsin(\frac{\omega T_1}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}})$ (II) erhält man

$$\left|\tilde{G}'(\omega)\right| = \frac{1}{2R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot T_1)^2}}\cdot\sqrt{\left(2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}}-\sqrt{1+(\omega T_1)^2}\right)^2+4\cdot\frac{(\omega T_1)^2}{1+(\omega T_1)^2}}$$

$$\left|\tilde{G}'(\omega)\right| = \frac{1}{2R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot T_1)^2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{2-(1+(\omega T_1)^2)}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}}\right)^2+4\cdot\frac{(\omega T_1)^2}{1+(\omega T_1)^2}}$$

$$\left|\tilde{G}'(\omega)\right| = \frac{1}{2R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot T_1)^2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{(1-(\omega T_1)^2)}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}}\right)^2+4\cdot\frac{(\omega T_1)^2}{1+(\omega T_1)^2}}$$

$$\left|\tilde{G}'(\omega)\right| = \frac{1}{2R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot T_1)^2}}\cdot\sqrt{\frac{(\omega T_1)^4-2\cdot(\omega T_1)^2+1}{1+(\omega T_1)^2}+4\cdot\frac{(\omega T_1)^2}{1+(\omega T_1)^2}}$$

$$\left|\tilde{G}'(\omega)\right| = \frac{1}{2R}\cdot\frac{1}{1+(\omega\cdot T_1)^2}\cdot\sqrt{(\omega T_1)^4-2\cdot(\omega T_1)^2+1+4\cdot(\omega T_1)^2}$$

$$\left|\tilde{G}'(\omega)\right| = \frac{1}{2R}\cdot\frac{1}{1+(\omega\cdot T_1)^2}\cdot\left((\omega T_1)^2+1\right) = \frac{1}{2R} \quad \to \text{unabhängig von} \quad \omega \quad !$$

h) Bestimmen Sie den Phasenwinkel von $\tilde{G}'(\omega)$. Dabei hilft die trigonometrische Umformung

$$\arctan\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right) = 2\cdot\text{artan}(\alpha)$$

Prüfen Sie diese Formel mit einer Formelsammlung nach

→ Aus der Normalform (I) von f)

$$\tilde{G}'(\omega) = \left[\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot T_1)^2}}\cdot\cos(\phi)-\frac{1}{2R}\right]-i\cdot\left[\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot T_1)^2}}\cdot\sin(\phi)\right]$$

erhält man mit den Umformungen (II) aus g)

$$\phi' = \arctan\left(-\frac{2\cdot\sin(\phi)}{2\cos(\phi)-\sqrt{1+(\omega T_1)^2}}\right) = -\arctan\left(\frac{2\cdot\omega T_1}{2-(1+(\omega T_1)^2)}\right)$$

$$\phi' = -\arctan\left(\frac{2\cdot\omega T_1}{1-(\omega T_1)^2}\right) = -2\cdot\arctan(\omega T_1) \quad .$$

i) Ist der in Punkt b) geforderte Nachweis damit vollständig erbracht?

→ Ja, denn

- der Betrag der um $-\frac{1}{2R}$ in den Ursprung verschobenen Ortskurve ist gemäß g) unabhängig von ω
- ϕ' durchläuft gemäß h) für $0 \leq \omega < \infty$ den Bereich $0 \geq \phi' > -180°$.

Aufgabe 9 (Wurzeln komplexer Zahlen)

Gegeben ist $z = 1$.

a) Bestimmen Sie alle Ergebnisse

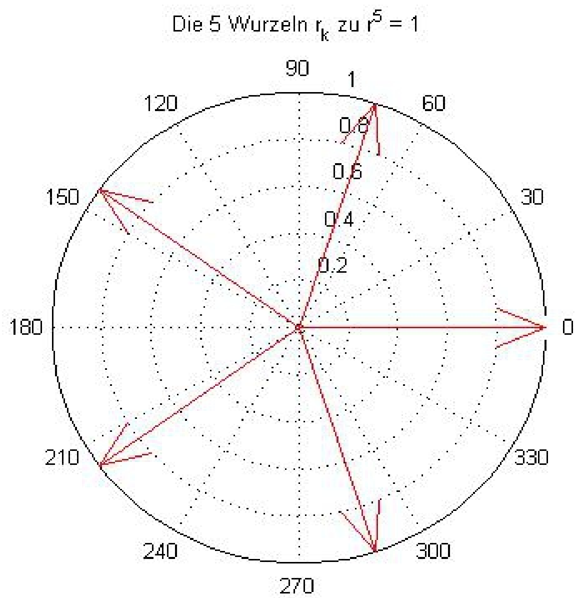
$$r_k = \sqrt[5]{z} = 1^{\frac{1}{5}}$$

$$r_k = \sqrt[5]{1 + i \cdot 0} = (1 + i \cdot 0)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{1} \cdot e^{i \cdot \left(0° + \frac{2k\pi}{5}\right)} = e^{i \cdot k \cdot 72°}, \quad k = \pm 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

b) Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es? → 5

c) Tragen Sie alle Ergebnisse aus a) in die komplexe Ebene ein.

→ Unbedingt von Hand durchführen! **Nur** zur Kontrolle mit **Scilab** (das folgende Diagramm wurde mit Matlab erstellt, dort gibt es den kompakten Befehl compass, in **Scilab** lässt sich der Befehl ***polarplot*** einsetzen)



d) Erklären Sie, warum es jeweils nur ein Ergebnis $(r_k)^5 = 1$ gibt, umgekehrt für jedes z aber mehrere verschiedene Ergebnisse $r_k = \sqrt[5]{z} = 1^{\frac{1}{5}}$.

→ Das Potenzieren jedes der 5 Wurzel-Zeiger mit 5 dreht diesen immer in den Punkt z=1.

Aufgabe 10 (Wurzeln komplexer Zahlen)

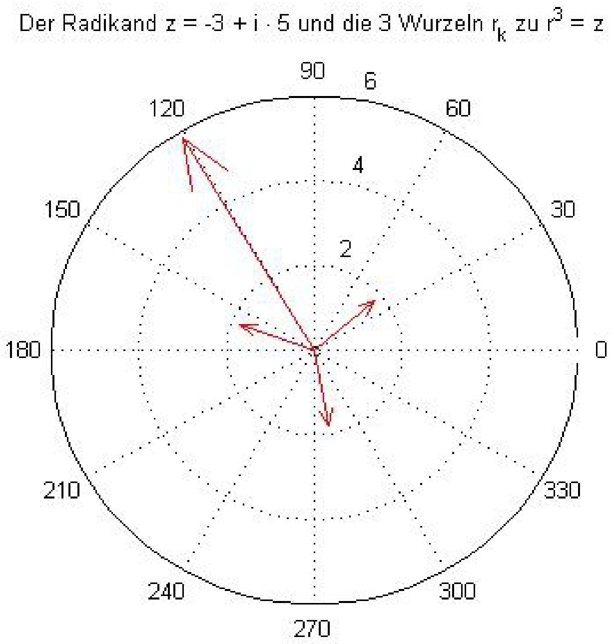
Gegeben ist $z = -3 + i \cdot 5$.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $r_k = \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}}$

$\rightarrow$ Mit $|z| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} = 5.8$, $\phi = \arctan\left(-\frac{5}{3}\right) = 120.97°$

$$r_k = \sqrt[3]{|z|} \cdot e^{i \cdot (\frac{\phi}{3} + k \cdot 120°)} = 1.8 \cdot e^{i \cdot (40.3° + k \cdot 120°)}, \; k = 0, \; 1, \; 2$$

b) Tragen Sie alle Lösungen aus a) in die komplexe Ebene ein.



$\rightarrow$ Unbedingt von Hand durchführen! **Nur** Zur Kontrolle mit **Scilab**:

c) Zeigen Sie, dass $(r_k)^3 = z$ für jeden Index k der Lösungen gilt. $\rightarrow$ Selbst durchführen.

Aufgabe 11 (komplexe Funktionen)

Für die Menge der komplexen Zahlen $z \in C$ sind außer den 4 Grundoperationen auch die meisten elementaren Funktionen definiert, im Folgenden drei Beispiele mit $z = x + i\,y$.

Die Exponential-Funktion:

$e^z = e^x \cdot e^{iy}$ für alle $z \in C$.

Die natürliche Logarithmus-Funktion:

$$\log_e(z) = \log_e|z| + i \cdot (\phi \pm 2 \cdot k \cdot \pi), \; z \in C \backslash 0, \; k \in N \; , \; \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Die komplexe Logarithmusfunktion ist also **mehrdeutig**.

Der Hauptwert ergibt sich für $k=0,\ -\pi<\phi\leq\pi$ als

$\log_e(z)=\log_e|z|+i\cdot\phi,\ z\in C\backslash 0$.

Die Sinusfunktion:

$$\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{-y+ix}-e^{-(-y+ix)}}{2i} .$$

Gegeben ist $z=-2-i\cdot 4$.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen für $\log_e(z)$.

$z=|z|\cdot e^{i\cdot(\phi\pm k\cdot 2\cdot\pi)}$,

$\log_e(z)=\log_e|z|+i\cdot(\phi\pm 2\cdot k\cdot\pi)=1.49-i\cdot(2.03\pm k\cdot 2\cdot\pi),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ ...$

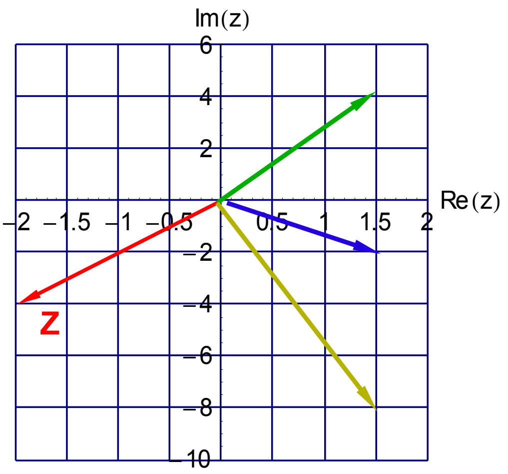
Achtung: ϕ im Bogenmaß

b) Tragen Sie die Zeiger der ersten n Lösungen (n<3) in die komplexe Ebene ein.

$\log_e(z)_0=1.49-i\cdot 2.03$

$\log_e(z)_1=1.49+i\cdot 4.24$

$\log_e(z)_2=1.49-i\cdot 8.32$



Sie liegen im Allgemeinen **nicht** symmetrisch zur reellen Achse. Achtung: Die Skalierung der Achsen ist ungleich.

c) Zeigen Sie, dass $e^{\log_e(z)}=z$ ist.

$\rightarrow\ e^{\log_e(z)}=e^{\log_e|z|+i\cdot(\phi\pm 2\cdot k\cdot\pi)}=|z|\cdot e^{i(\phi\pm k\cdot 2\cdot\pi)},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ ...$, siehe a).

d) Nur zum Vergnügen: Bestimmen Sie sin(z) in Normalform.

$\rightarrow\ \sin(z)=\sin(-2-i\cdot 4)=-24.8+i\cdot 11.4$