Mathematik 1 - Übungsblatt 12

… und nicht vergessen: Täglich einmal Scilab !

Aufgabe 1 (Zuordnung reeller Größen zu komplexen Größen)

Der Vorteil der komplexen Rechnung gegenüber der reellen besteht darin, dass die erforderlichen Rechnungen in bestimmten Aufgabenstellungen (u.a. Wechselstromrechnung, Schwingungsberechnung in der technischen Mechanik, Physik) einfacher durchführbar sind, siehe Negativbeispiel in Aufgabe 10. Der gesamte Vorgang besteht dann aus drei Phasen:

- Darstellung der reellen physikalischen Größen durch komplexe Größen
- Rechnung im komplexen Zahlenraum
- Darstellung der komplexen Größen durch reelle Größen.

Gegeben ist die eingeprägte (= belastungsunabhängige) sinusförmige Wechselspannung des Haushaltsnetzes

$$u(t)=\hat{u}\cdot\sin(\alpha(t))=\sqrt{2}\cdot U_{eff}\cdot\sin(\omega\cdot t) \quad \text{mit den Konstanten}$$

$$u_{eff}=230[\text{Volt}] \quad \text{und} \quad \omega=\frac{2\cdot\pi}{T}=2\cdot\pi\cdot f\left[\frac{1}{s}\right] \quad .$$

Es bedeuten

- ω → Kreisfrequenz mit der Periodendauer T einer vollständigen Sinusschwingung und der Frequenz f. Im Haushaltsnetz ist T = 20 [ms], $f=\frac{1}{T}=50[\text{Hz}]$
- $\hat{u}$ → Amplitude der Sinusschwingung, im Haushaltsnetz ist $\hat{u}=325[\text{Volt}]$.
- U_{eff} → Effektivwert der sinusförmigen Spannung u(t)

(Wird alles in Elektrotechnik genau erklärt, hier geht es nur um die Sinusfunktion)

a) Warum ist das Argument $\omega\cdot t$ dimensionslos?

b) Warum stellt $\omega\cdot t$ eine Winkelgröße dar?

c) Wie ändert sich der Winkel $\alpha(t)=\omega\cdot t$ in Abhängigkeit von der Zeit t?

d) Skizzieren Sie ein $\omega\cdot t$ - u(t) -Koordinatensystem, tragen Sie für $t\in[-0.25\cdot T, 1.5\cdot T]$ Winkelmarken bei $\alpha=-90°,\ 0°,\ 90°,\ 180°,\ 270°$ usw. ein und stellen Sie den Verlauf u(t) dar.

Tipp: Lassen Sie **Scilab** für sich arbeiten, siehe Anhang.

e) Schreiben Sie die Spannung u(t) mit Hilfe der Eulerformeln in komplexer Form.

f) Wenn man bereits weiß, dass die Spannung sinusförmig mit der Periodendauer T verläuft: Welche Angaben aus e) reichen dann aus, um u(t) eindeutig zu beschreiben? Hinweis: Das Ergebnis ist eine komplexe Zahl, vorzugsweise in Exponentialform und wird **„komplexer Spannungszeiger** $\tilde{U}$ **oder** $\underline{U}$ **“** genannt. Welchen Betrag und welchen Winkel weist dieser Zeiger auf?

Aufgabe 2 (Zuordnung reeller Größen zu komplexen Größen)

Ein rein ohmsches Netzwerk wird mit der Spannung $u(t)=\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t)$ aus Aufgabe 1 gespeist. Alle Spannungen an den Widerständen haben dann ebenfalls einen sinusförmigen Verlauf, im Allgemeinen aber mit anderer Amplitude. Z. B. misst man am Widerstand R_1 die Spannung

$$u_1(t)=\hat{u}_1\cdot\sin(\omega\cdot t)=k_1\cdot\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t) \quad \text{mit} \quad k_1=\frac{\hat{u}_1}{\hat{u}},\ k_1\in\mathbb{R} \quad \text{als Proportionalitätsfaktor.}$$

a) Skizzieren Sie für $\hat{u}_1=0.5\cdot\hat{u}$ den Verlauf von u(t) und $u_1(t)$ für $t\in[-0.25\cdot T, 1.5\cdot T]$. Tipp: Lassen Sie MATLAB „ran“.

b) Schreiben Sie die Spannung $u_1(t)$ mit Hilfe der Eulerformeln in komplexer Form.

c) Wenn man die eingeprägte Spannung u(t) bereits kennt: Welche Angaben aus a) reichen dann aus, um $u_1(t)$ eindeutig zu beschreiben? Hinweis: Das Ergebnis ist ein komplexer Spannungszeiger $\tilde{U}_1$ vorzugsweise in Exponentialform. Welchen Betrag und welchen Winkel hat er?

Aufgabe 3 (Zuordnung reeller Größen zu komplexen Größen)

Wenn ein elektrisches Netzwerk außer ohmschen Widerständen auch Kondensatoren (Kapazitäten) und/oder Spulen (Induktivitäten) enthält und mit einer eingeprägten Spannung $u(t)=\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t)$ gespeist wird, misst man nach der Zeitspanne von einigen Perioden T praktisch an jedem Netzwerkelement ebenfalls eine sinusförmige Spannung gleicher Periodendauer T, die jedoch gegenüber u(t) ähnlich wie bei Aufgabe 2 eine andere Amplitude und zusätzlich eine von 0 verschiedene Phasenlage zeigt. Das lässt sich für irgendein Element mit dem Index „a“ als

$$u_a(t)=\hat{u}_a\cdot\sin(\omega\cdot t-\phi_a) \quad \text{ausdrücken.}$$

a) Skizzieren Sie für $\hat{u}_a=0.5\cdot\hat{u}$ $\phi_a=30°$ den Verlauf von u(t) und $u_a(t)$ für $t\in[-0.25\cdot T, 1.5\cdot T]$. Tipp: MATLAB einspannen.

b) Schreiben Sie die Spannung ua(t) mit Hilfe der Eulerformeln in komplexer Form.

c) Wenn man die eingeprägte Spannung u(t) bereits kennt: Welche Angaben aus b) reichen jetzt aus, um ua(t) eindeutig zu beschreiben? Hinweis: Das Ergebnis ist ein komplexer Spannungszeiger $\tilde{U}_a$, vorzugsweise in Exponentialform..

Aufgabe 4 (Zuordnung reeller Größen zu komplexen Größen)

Was ändert sich an den Ergebnissen zu Aufgabe 1 – 3, wenn die eingeprägten Spannungen einen cosinusförmigen Verlauf haben, also

$$u(t)=\hat{u}\cdot\cos(\alpha(t))=\sqrt{2}\cdot U_{eff}\cdot\cos(\omega\cdot t) \quad \text{oder}$$

$$u_1(t)=\hat{u}_1\cdot\cos(\omega\cdot t)=k_1\cdot\hat{u}\cdot\cos(\omega\cdot t) \quad \text{oder}$$

$$u_a(t)=\hat{u}_a\cdot\cos(\omega\cdot t-\phi_a) \quad ?$$

Aufgabe 5 (Zuordnung eines komplexen Spannungszeigers zur reellen Zeitfunktion)

Gegeben ist die eingeprägte Speisespannung

$$u(t)=\hat{u}\cdot\sin(\alpha(t))=\sqrt{2}\cdot U_{eff}\cdot\sin(\omega\cdot t)=\sqrt{2}\cdot 10\cdot\sin(\omega\cdot t)[\text{Volt}]$$

eines ohmschen Netzwerks. Für die Spannung am Widerstand R_1 wird der komplexe Zeiger

$\tilde{U}_1=5\cdot e^{0°\cdot i}[\text{Volt}]$ genannt.

a) Geben Sie die zugehörige reelle Spannung u1(t) an.

b) Fertigen Sie ein Zeitdiagramm für das 1.5-fache der Periodendauer T an.

Aufgabe 6 (Zuordnung eines komplexen Spannungszeigers zur reellen Zeitfunktion)

Gegeben ist die Speisespannung $u(t)=\hat{u}\cdot\sin(\alpha(t))=\sqrt{2}\cdot u_{eff}\cdot\sin(\omega\cdot t)=\sqrt{2}\cdot 380\cdot\sin(\omega\cdot t)[\text{Volt}]$ eines allgemeinen Netzwerks. Für die Spannung am Kondensator C1 wird der komplexe Zeiger

$\tilde{U}_{C1}=150\cdot e^{53°\cdot i}[\text{Volt}]$ genannt.

a) Geben Sie die zugehörige reelle Spannung uC1(t) an.

a) Skizzieren Sie u(t) und uC1(t).

Aufgabe 7 (Phasenlage zwischen zwei Spannungen)

Ein Netzwerk wird durch die eingeprägte Spannung $u(t)=28\cdot\sin(\omega\cdot t+30°)[\text{Volt}]$ gespeist. An einer Induktivität wird mit einem Oszillographen eine sinusförmige Spannung $u_L(t)$ gleicher Frequenz gemessen, deren Amplitude 7 Volt beträgt und – bezogen auf den Zeit-Nullpunkt - eine Phasenverschiebung von $\phi_L=60°$ hat.

a) Skizzieren Sie die beiden Spannungen.

b) Skizzieren Sie die beiden Spannungszeiger.

c) Geben Sie das komplexe Verhältnis der Zeiger zu uL (t) und u(t) an.

Aufgabe 8 (Rechenoperationen mit komplexen Größen)

An der Reihenschaltung eines ohmschen Widerstands R und eines Kondensators C liegt die Spannung

$$u_a(t)=\sqrt{2}\cdot U_{eff}\cdot\sin(\omega\cdot t)=\sqrt{2}\cdot 380\cdot\sin(\omega\cdot t)[\text{Volt}] \quad .$$

Der komplexe Wechselstrom-Widerstand der Reihenschaltung ist $\tilde{Z}=R+\frac{1}{i\cdot\omega\cdot C}$

a) Geben Sie den komplexen Spannungszeiger $\tilde{U}_a$ an.

b) Berechnen Sie den komplexen Stromzeiger $\tilde{I}_a=\frac{\tilde{U}_a}{\tilde{Z}}$ in Exponentialform.

c) Tragen Sie die Zeigergrößen in die komplexe Ebene ein, z. B. für $T=0.02[\text{s}]$, $R=1[\text{Ohm}]$, $C=2\cdot 10^{-3}[\text{Farad}]$.

Aufgabe 9 (Rechenoperationen mit komplexen Größen)

Gegeben sind die beiden parallel geschalteten komplexen Widerstände

$$\tilde{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} \quad \text{und} \quad \tilde{Z}_2 = R_2 + i \cdot \omega \cdot L$$

$$f = 50[s^{-1}] \ ,$$

$$R_1 = 50[Ohm] \ , \quad R_2 = 100[Ohm] \ , \quad C = 3.18 \cdot 10^{-5}[F] \ , \quad L = 0.64[H]$$

a) Geben Sie den resultierenden komplexen Widerstand allgemein in Exponential- und Normalform an.

b) Berechnen Sie den resultierenden komplexen Widerstand mit den Zahlenwerten. Nehmen Sie dabei **ausnahmsweise** die Dimensionen als bereits passend an.

c) Tragen Sie die drei Zeiger in die komplexe Ebene ein.

Aufgabe 10 (Berechnung von zeitlichen Spannungsverläufen **ohne** komplexe Rechnung)

(**Keine** Pflicht, nur zum Vergnügen ...)

Die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R und einer Kapazität C ist an einer Spannungsquelle u(t) angeschlossen. Die Spannung $u_C(t)$ an der Kapazität steht mit einer **beliebig** verlaufenden Speisespannung u(t) allgemein über die Differenzialgleichung *(kommt später)*

$$u(t) = u_C(t) + R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \quad \text{in Zusammenhang.}$$

Falls u(t) sinusförmig mit

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U_{eff} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

verläuft, ist die Spannung am Kondensator im eingeschwungenen Zustand ebenfalls sinusförmig, jedoch mit anderem Effektivwert und einem von Null verschiedenen Phasenwinkel:

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cdot U_{Ceff} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_C)$$

Da die Differenzialgleichung aus physikalischen Gründen immer erfüllt sein muss, gilt

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U_{eff} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \sqrt{2} \cdot U_{Ceff} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_C) + \sqrt{2} U_{Ceff} \cdot \omega R C \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_C)$$

Durch trigonometrische Umformungen und Koeffizientenvergleiche erhält man daraus die beiden unbekannten Größen U_{Ceff} und ϕ_C . Bestimmen Sie diese.

Hinweis: Verwenden Sie die allgemeine trigonometrische Umformung

$$\sin(\omega \cdot t + \phi) = \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\phi) + \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\phi)$$

Anhang

Ein mit **Scilab** erstelltes Diagramm, welches zwei Wechselspannungen mit unterschiedlichen Amplituden und Phasenwinkel zeigt: