Mathematik 1 - Übungsblatt 12

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Zuordnung reeller Größen zu komplexen Größen)

Der Vorteil der komplexen Rechnung gegenüber der reellen besteht darin, dass die erforderlichen Rechnungen in bestimmten Aufgabenstellungen (u.a. Wechselstromrechnung, Schwingungsberechnung in der technischen Mechanik, Physik) einfacher durchführbar sind, siehe Negativbeispiel in Aufgabe 10. Der gesamte Vorgang besteht dann aus drei Phasen:

- Darstellung der reellen physikalischen Größen durch komplexe Größen
- Rechnung im komplexen Zahlenraum
- Darstellung der komplexen Größen durch reelle Größen.

Gegeben ist die eingeprägte (= belastungsunabhängige) sinusförmige Wechselspannung des Haushaltsnetzes

$$u(t)=\hat{u}\cdot\sin(\alpha(t))=\sqrt{2}\cdot U_{eff}\cdot\sin(\omega\cdot t) \quad \text{mit den Konstanten}$$

$$u_{eff}=230[\text{Volt}] \quad \text{und} \quad \omega=\frac{2\cdot\pi}{T}=2\cdot\pi\cdot f\left[\frac{1}{s}\right] \quad .$$

Es bedeuten

- ω → Kreisfrequenz mit der Periodendauer T einer vollständigen Sinusschwingung und der Frequenz f. Im Haushaltsnetz ist T = 20 [ms], $f=\frac{1}{T}=50[\text{Hz}]$
- $\hat{u}$ → Amplitude der Sinusschwingung, im Haushaltsnetz ist $\hat{u}=325[\text{Volt}]$.
- U_{eff} → Effektivwert der sinusförmigen Spannung u(t)

(Wird alles in Elektrotechnik genau erklärt, hier geht es nur um die Sinusfunktion)

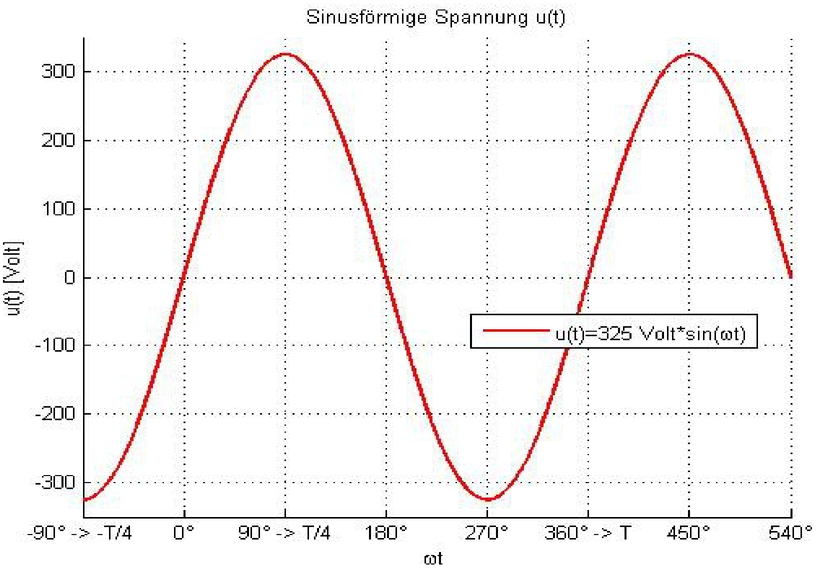
a) Warum ist das Argument $\omega\cdot t$ dimensionslos? → $\omega\left[\frac{1}{s}\right]\cdot t[s]=\omega\cdot t[\,]$

b) Warum stellt $\omega\cdot t$ eine Winkelgröße dar? → Der Zahlenwert von $\omega\cdot t$ kann als Winkel im Bogenmaß interpretiert werden. Winkel sind dimensionslos.

c) Wie ändert sich der Winkel $\alpha(t)=\omega\cdot t$ in Abhängigkeit von der Zeit t? → t wächst linear. Da die Kreisfrequenz ω eine Konstante darstellt, ändert sich $\alpha(t)$ ebenfalls linear mit t.

d) Skizzieren Sie ein $\omega\cdot t$ - u(t) -Koordinatensystem, tragen Sie für $t\in[-0.25\cdot T, 1.5\cdot T]$ Winkelmarken bei $\alpha=-90°,\ 0°,\ 90°,\ 180°,\ 270°$ usw. ein und stellen Sie den Verlauf u(t) dar.

Tipp: Lassen Sie **Scilab** für sich arbeiten!



e) Schreiben Sie die Spannung u(t) mit Hilfe der Eulerformeln in komplexer Form.

$$u(t)=\sqrt{2}\cdot 230\cdot \sin(\omega\cdot t)=\sqrt{2}\cdot 230\cdot \frac{e^{i\cdot\omega\cdot t}-e^{-i\cdot\omega\cdot t}}{2\cdot i}[\text{Volt}]$$

f) Wenn man bereits weiß, dass die Spannung sinusförmig mit der Periodendauer T verläuft: Welche Angaben aus e) reichen dann aus, um u(t) eindeutig zu beschreiben? Hinweis: Das Ergebnis ist eine komplexe Zahl, vorzugsweise in Exponentialform und wird **„komplexer Spannungszeiger** $\tilde{U}$ **oder** $\underline{U}$ **“** genannt. Welchen Betrag und welchen Winkel weist dieser Zeiger auf? →

Die Größen $\sqrt{2}$, i stellen unabhängig vom physikalischen Hintergrund Konstanten dar, ω und t sind bei gegebener Sinusschwingung bekannt. Zur Charakterisierung reichen dann die Angabe des Effektivwertes U_{eff} und des Phasenwinkels. Letzterer ist hier $\phi=0°$. Beide Angaben lassen sich kompakt in einer Zeigergröße „verpacken“:

$$\tilde{U}=U_{eff}\cdot e^{i\cdot\phi}=230\cdot e^{i\cdot 0°}[\text{Volt}]$$

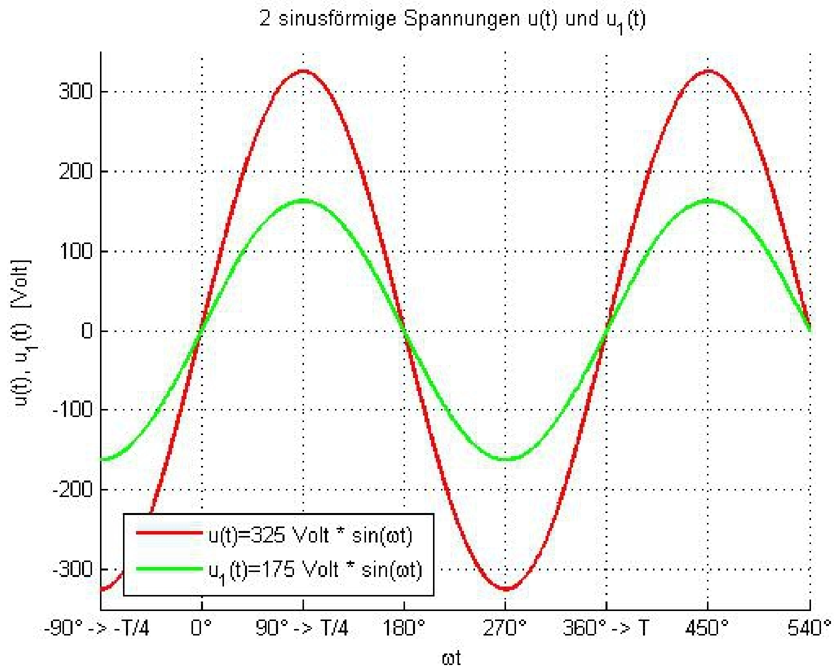
Aufgabe 2 (Zuordnung reeller Größen zu komplexen Größen)

Ein rein ohmsches Netzwerk wird mit der Spannung $u(t)=\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t)$ aus Aufgabe 1 gespeist. Alle Spannungen an den Widerständen haben dann ebenfalls einen sinusförmigen Verlauf, im Allgemeinen aber mit anderer Amplitude. Z. B. misst man am Widerstand R_1 die Spannung

$$u_1(t)=\hat{u}_1\cdot\sin(\omega\cdot t)=k_1\cdot\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t) \quad \text{mit} \quad k_1=\frac{\hat{u}_1}{\hat{u}},\; k_1\in\mathbb{R} \quad \text{als Proportionalitätsfaktor.}$$

a) Skizzieren Sie für $\hat{u}_1=0.5\cdot\hat{u}$ den Verlauf von u(t) und $u_1(t)$ für $t\in[-0.25\cdot T, 1.5\cdot T]$.

Tipp: Lassen Sie **Scilab** „ran“, Sie erhalten ein Diagramm sehr ähnlich dem Folgenden:



b) Schreiben Sie die Spannung $u_1(t)$ mit Hilfe der Eulerformeln in komplexer Form. →

$$u_1(t)=\sqrt{2}\cdot U_{1\ eff}\cdot \sin(\omega\cdot t)=\sqrt{2}\cdot 230\cdot k_1\cdot \frac{e^{i\cdot\omega\cdot t}-e^{-i\cdot\omega\cdot t}}{2\cdot i}[\text{Volt}]$$

c) Wenn man die eingeprägte Spannung u(t) bereits kennt: Welche Angaben aus a) reichen dann aus, um $u_1(t)$ eindeutig zu beschreiben? Hinweis: Das Ergebnis ist ein komplexer Spannungszeiger $\tilde{U}_1$ vorzugsweise in Exponentialform. Welchen Betrag und welchen Winkel hat er? →

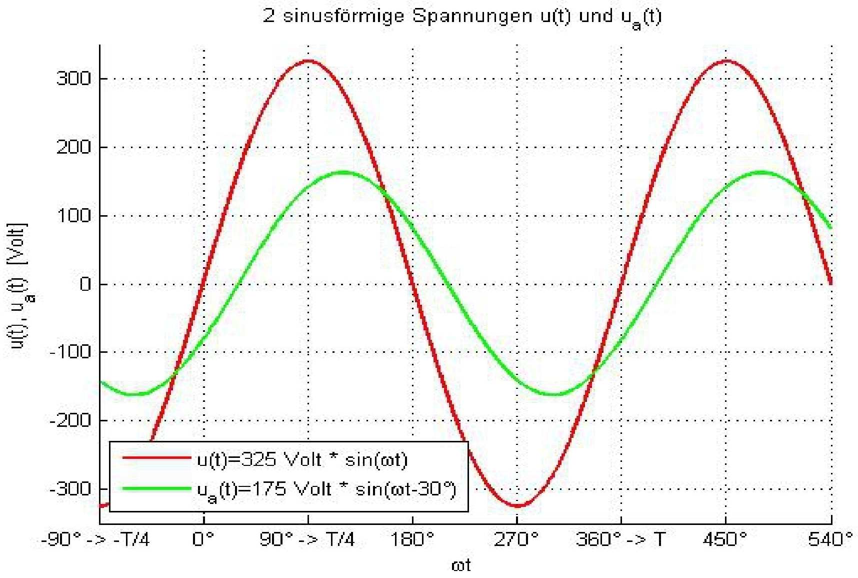
$$\tilde{U}_1=U_{1\ eff}\cdot e^{i\cdot\phi}=230\cdot k_1\cdot e^{i\cdot 0^\circ}[\text{Volt}]$$

Aufgabe 3 (Zuordnung reeller Größen zu komplexen Größen)

Wenn ein elektrisches Netzwerk außer ohmschen Widerständen auch Kondensatoren (Kapazitäten) und/oder Spulen (Induktivitäten) enthält und mit einer eingeprägten Spannung $u(t)=\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t)$ gespeist wird, misst man nach der Zeitspanne von einigen Perioden T praktisch an jedem Netzwerkelement ebenfalls eine sinusförmige Spannung gleicher Periodendauer T, die jedoch gegenüber u(t) ähnlich wie bei Aufgabe 2 eine andere Amplitude und zusätzlich eine von 0 verschiedene Phasenlage zeigt. Das lässt sich für irgendein Element mit dem Index „a“ als

$u_a(t)=\hat{u}_a\cdot\sin(\omega\cdot t-\phi_a)$ ausdrücken.

a) Skizzieren Sie für $\hat{u}_a=0.5\cdot\hat{u}$ $\phi_a=30°$ den Verlauf von u(t) und $u_a(t)$ für $t\in[-0.25\cdot T, 1.5\cdot T]$. Tipp: **Scilab** einspannen:



b) Schreiben Sie die Spannung ua(t) mit Hilfe der Eulerformeln in komplexer Form.

$$u_a(t)=\sqrt{2}\cdot U_{a\,eff}\cdot\sin(\omega\cdot t-\phi_a)=\sqrt{2}\cdot U_{a\,eff}\cdot\frac{e^{i\cdot(\omega\cdot t-\phi_a)}-e^{-i\cdot(\omega\cdot t-\phi_a)}}{2\cdot i}[\text{Volt}]$$

c) Wenn man die eingeprägte Spannung u(t) bereits kennt: Welche Angaben aus b) reichen jetzt aus, um ua(t) eindeutig zu beschreiben? Hinweis: Das Ergebnis ist ein komplexer Spannungszeiger $\tilde{U}_a$, vorzugsweise in Exponentialform.

$$\tilde{U}_a=U_{1\,eff}\cdot e^{-i\cdot\phi_a}[\text{Volt}]$$

Aufgabe 4 (Zuordnung reeller Größen zu komplexen Größen)

Was ändert sich an den Ergebnissen zu Aufgabe 1 – 3, wenn die eingeprägten Spannungen einen cosinusförmigen Verlauf haben, also

$$u(t)=\hat{u}\cdot\cos(\alpha(t))=\sqrt{2}\cdot U_{eff}\cdot\cos(\omega\cdot t)\quad\text{oder}$$

$$u_1(t)=\hat{u}_1\cdot\cos(\omega\cdot t)=k_1\cdot\hat{u}\cdot\cos(\omega\cdot t)\quad\text{oder}$$

$$u_a(t)=\hat{u}_a\cdot\cos(\omega\cdot t-\phi_a)\quad ?$$

Nichts, da die Darstellung der Spannungen in komplexer Form keinen Einfluss auf Betrag oder Phasenwinkel hat:

$$u(t)=\sqrt{2}\cdot 230\cdot\cos(\omega\cdot t)=\sqrt{2}\cdot 230\cdot\frac{e^{i\cdot\omega\cdot t}+e^{-i\cdot\omega\cdot t}}{2}[\text{Volt}]\rightarrow\tilde{U}=U_{eff}\cdot e^{i\cdot 0°}$$

$$u_1(t)=\sqrt{2}\cdot U_{1\,eff}\cdot\cos(\omega\cdot t)=\sqrt{2}\cdot 230\cdot k_1\cdot\frac{e^{i\cdot\omega\cdot t}+e^{-i\cdot\omega\cdot t}}{2}[\text{Volt}]\rightarrow\tilde{U}_1=U_{1\,eff}\cdot e^{i\cdot 0°}$$

$$u_a(t)=\sqrt{2}\cdot U_{a\,eff}\cdot\cos(\omega\cdot t)=\sqrt{2}\cdot 230\cdot k_1\cdot\frac{e^{i\cdot(\omega\cdot t+\phi_a)}+e^{-i\cdot(\omega\cdot t+\phi_a)}}{2}[\text{Volt}]\rightarrow\tilde{U}_a=U_{a\,eff}\cdot e^{-i\cdot\phi_a}\quad .$$

Aufgabe 5 (Zuordnung eines komplexen Spannungszeigers zur reellen Zeitfunktion)

Gegeben ist die eingeprägte Speisespannung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\alpha(t)) = \sqrt{2} \cdot U_{eff} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(\omega \cdot t)[\text{Volt}]$$

eines ohmschen Netzwerks. Für die Spannung am Widerstand R_1 wird der komplexe Zeiger

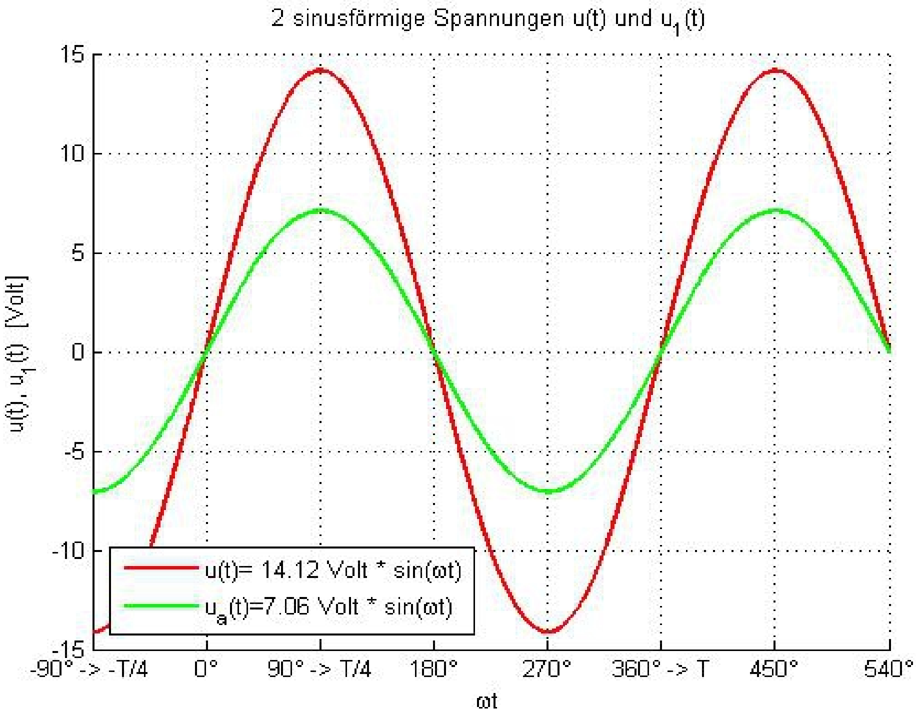
$\tilde{U}_1 = 5 \cdot e^{0° \cdot i}[\text{Volt}]$ genannt.

a) Geben Sie die zugehörige reelle Spannung u1(t) an.

$$u_1(t) = \sqrt{2} \cdot U_{1\,eff} \sin(\omega \cdot t + \phi_1) = \sqrt{2} \cdot 5 \cdot \sin(\omega \cdot t + 0°) = \sqrt{2} \cdot 5 \sin(\omega \cdot t)[\text{Volt}]$$

b) Fertigen Sie ein Zeitdiagramm für das 1.5-fache der Periodendauer T an.

Mit **Scilab**:



Aufgabe 6 (Zuordnung eines komplexen Spannungszeigers zur reellen Zeitfunktion)

Gegeben ist die Speisespannung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\alpha(t)) = \sqrt{2} \cdot u_{eff} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \sqrt{2} \cdot 380 \cdot \sin(\omega \cdot t)[\text{Volt}]$ eines allgemeinen Netzwerks. Für die Spannung am Kondensator C1 wird der komplexe Zeiger

$\tilde{U}_{C1} = 150 \cdot e^{53° \cdot i}[\text{Volt}]$ genannt.

a) Geben Sie die zugehörige reelle Spannung uC1(t) an.

$$u_{c1}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{C1\,eff} \sin(\omega \cdot t + \phi_{C1}) = \sqrt{2} \cdot 150 \cdot \sin(\omega \cdot t + 53°)[\text{Volt}]$$

b) Skizzieren Sie u(t) und u_{C1}(t). → Selber machen (orientieren Sie sich z. B. an den Lösungsvorschlägen zu den Aufgaben 3) oder 5).

Aufgabe 7 (Phasenlage zwischen zwei Spannungen)

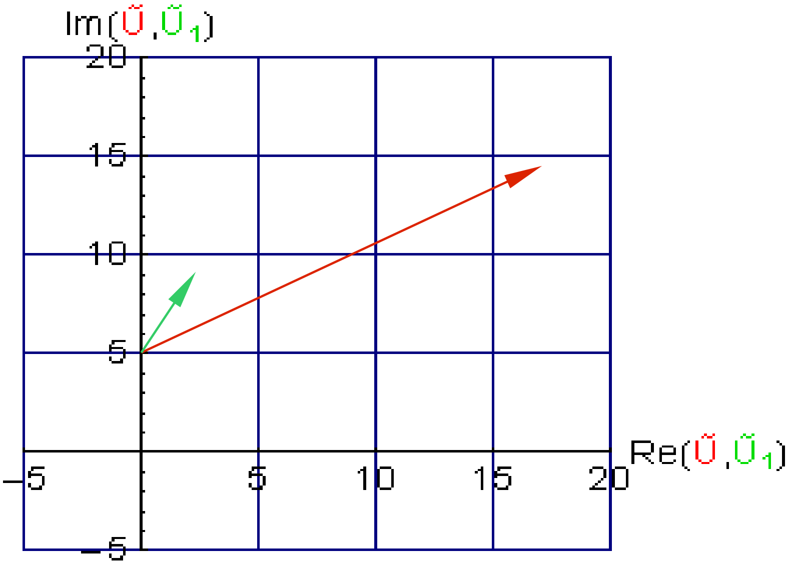
Ein Netzwerk wird durch die eingeprägte Spannung $u(t)=28\cdot\sin(\omega\cdot t+30°)[\text{Volt}]$ gespeist. An einer Induktivität wird mit einem Oszillographen eine sinusförmige Spannung $u_L(t)$ gleicher Frequenz gemessen, deren Amplitude 7 Volt beträgt und – bezogen auf den Zeit-Nullpunkt - eine Phasenverschiebung von $\phi_L=60°$ hat.

a) Skizzieren Sie die beiden Spannungen.→ Selber machen (orientieren Sie sich z. B. an den vorausgegangenen Lösungsvorschlägen)

b) Skizzieren Sie die beiden Spannungszeiger.

$$\tilde{U}=\frac{28}{\sqrt{2}}e^{i\cdot 30°}=17.1+i\cdot 9.9\ [\text{Volt}]$$

$$\tilde{U}_L=\frac{7}{\sqrt{2}}e^{i\cdot 60°}=2.5+i\cdot 4.3\ [\text{Volt}]$$



Achtung: Die Beträge der Zeiger sind Effektivwerte, die Amplituden müssen deshalb durch $\sqrt{2}$ geteilt werden.

c) Geben Sie das komplexe Verhältnis der Zeiger zu uL (t) und u(t) an.

$$\frac{\tilde{U}_L}{\tilde{U}}=0.25\cdot e^{i\cdot 30°}$$

Aufgabe 8 (Rechenoperationen mit komplexen Größen)

An der Reihenschaltung eines ohmschen Widerstands R und eines Kondensators C liegt die Spannung

$$u_a(t)=\sqrt{2}\cdot U_{eff}\cdot\sin(\omega\cdot t)=\sqrt{2}\cdot 380\cdot\sin(\omega\cdot t)[\text{Volt}]\ .$$

Der komplexe Wechselstrom-Widerstand der Reihenschaltung ist $\tilde{Z}=R+\frac{1}{i\cdot\omega\cdot C}$

a) Geben Sie den komplexen Spannungszeiger $\tilde{U}_a$ an.

$$\tilde{U}_a = U_{eff} \cdot e^{i \cdot 0^\circ} = 380 \cdot e^{i \cdot 0^\circ} [\text{Volt}]$$

b) Berechnen Sie den komplexen Stromzeiger $\tilde{I}_a = \frac{\tilde{U}_a}{\tilde{Z}}$ in Exponentialform.

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{U}_a}{\tilde{Z}} = \frac{U_{eff} \cdot e^{i \cdot 0^\circ}}{R + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C}} = \frac{U_{eff} \cdot e^{i \cdot 0^\circ}}{R - \frac{i}{\omega \cdot C}} = \frac{380 \cdot e^{i \cdot 0^\circ}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega \cdot C)^2}} \cdot e^{i \cdot \arctan\left(-\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}\right)}} [\text{Ampere}]$$

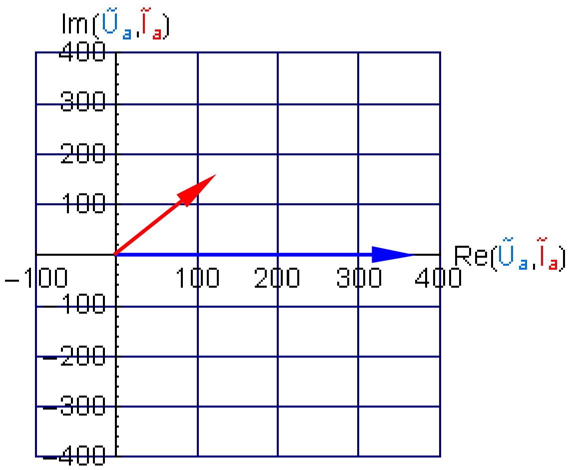
$$\tilde{I}_a = \frac{380}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega \cdot C)^2}}} \cdot e^{+i \cdot \arctan\left(\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}\right)} \ [\text{Ampere}]$$

c) Tragen Sie die Zeigergrößen in die komplexe Ebene ein.

Z. B. für $T = 0.02[s]$, $R = 1[\text{Ohm}]$, $C = 2 \cdot 10^{-3}[\text{Farad}]$.

$$\tilde{U}_a = U_{eff} \cdot e^{i \cdot 0^\circ} = 380 \cdot e^{i \cdot 0^\circ} = 380 + i \cdot 0 \ [\text{Volt}]$$

$$\tilde{I}_a = \frac{380}{\sqrt{1^2 + 1.59^2}} \cdot e^{i \cdot \arctan\left(\frac{1}{0.628}\right)} = \frac{380}{1.88} \cdot e^{i \cdot \arctan(1.59)} = 202 \cdot e^{i \cdot 57.9^\circ} = 107.3 + i \cdot 171.1 \ [\text{Ampere}]$$



(Elektrotechnische Interpretation: Der Strom eilt der Spannung voraus)

Aufgabe 9 (Rechenoperationen mit komplexen Größen)

Gegeben sind die beiden parallel geschalteten komplexen Widerstände

$$\tilde{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} \quad \text{und} \quad \tilde{Z}_2 = R_2 + i \cdot \omega \cdot L$$

$f = 50[s^{-1}]$,

$R_1 = 50[\text{Ohm}]$, $R_2 = 100[\text{Ohm}]$, $C = 3.18 \cdot 10^{-5}[F]$, $L = 0.64[H]$

a) Geben Sie den resultierenden komplexen Widerstand allgemein in Exponential- und Normalform an.

$$\tilde{Z}_{res}=\frac{\tilde{Z}_1\cdot\tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_1+\tilde{Z}_2}$$
$$=\frac{R_2+R_1\cdot(\omega C)^2\cdot\left((\omega LC)^2+R_2\cdot(R_1+R_2)\right)}{1+2\omega^2LC+(\omega C)^2\cdot\left((\omega L)^2+(R_1+R_2)^2\right)}+i\cdot\frac{\omega\cdot\left(L+C\cdot(\omega L)^2+(\omega C)^2 L R_1^2+C R_2^2\right)}{1+2\omega^2LC+(\omega C)^2\cdot\left((\omega L)^2+(R_1+R_2)^2\right)}$$

Es würde ausreichen, Zähler und Nenner für sich in Normalform darzustellen:

$$\tilde{Z}_{res} = \frac{\tilde{Z}_1\cdot\tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_1+\tilde{Z}_2} = \frac{R_1R_2+\frac{L}{C}+i\cdot\left(\omega L R_1-\frac{R_2}{\omega C}\right)}{R_1+R_2+i\cdot\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)} = R_2\cdot\frac{1+\frac{L}{R_1R_2C}+i\left(\frac{\omega L}{R_2}-\frac{1}{\omega C R_1}\right)}{1+\frac{R_2}{R_1}+i\cdot\left(\frac{\omega L}{R_1}-\frac{1}{\omega C R_1}\right)}$$

Tipp: Bei diesen „Monster"-Rechnungen hilft es, zweckmäßige Abkürzungen zu definieren. Z. B. :

$T_1=CR_1$, $T_2=\frac{L}{R_2}$, $k=\frac{R_2}{R_1}$. Wegen der Dimension [s] bezeichnet man T_1 , T_2 als „Zeitkonstanten", k ist ein dimensionsloser Faktor, insbesondere gilt $R_1=\frac{R_2}{k}$. Damit wird der vorherige Ausdruck etwas übersichtlicher:

$$\tilde{Z}_{res} = R_2\cdot\frac{1+\frac{T_2}{T_1}+i\left(\omega T_2-\frac{1}{\omega T_1}\right)}{1+k+i\cdot\left(k\cdot\omega T_2-\frac{1}{\omega T_1}\right)}$$

Hieraus lässt sich schließlich die Exponentialform bestimmen. Dazu definiert man zunächst die Phasenwinkel des Zähler- und Nennerterms:

$$\phi_Z = \arctan\left(\frac{\omega T_2-\frac{1}{\omega T_1}}{1+\frac{T_2}{T_1}}\right) , \quad \phi_N = \arctan\left(\frac{k\omega T_2-\frac{1}{\omega T_1}}{1+k}\right)$$

$$\tilde{Z}_{res} = R_2\cdot\sqrt{\frac{\left(1+\frac{T_2}{T_1}\right)^2+\left(\omega T_2-\frac{1}{\omega T_1}\right)^2}{(1+k)^2+\left(k\cdot\omega T_2-\frac{1}{\omega T_1}\right)^2}}\cdot e^{i\cdot(\phi_Z-\phi_N)}$$

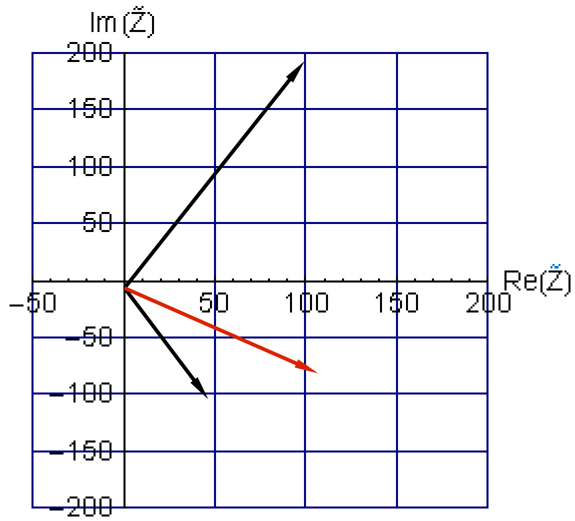
b) Berechnen Sie den resultierenden komplexen Widerstand mit den Zahlenwerten. Nehmen Sie dabei **ausnahmsweise** die Dimensionen als bereits passend an.

$\tilde{Z}_1=50.0-i\cdot 100.0= \ [Ohm]$

$\tilde{Z}_2=100.0+i\cdot 201.1= \ [Ohm]$

$\tilde{Z}_{res}=115.3-i\cdot 77.3=138.8\cdot e^{-33.8°} \ [Ohm]$

c) Tragen Sie die drei Zeiger in die komplexe Ebene ein.



Aufgabe 10 (Berechnung von zeitlichen Spannungsverläufen **ohne** komplexe Rechnung)

(**Keine** Pflicht, nur zum Vergnügen ...)

Die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R und einer Kapazität C ist an einer Spannungsquelle u(t) angeschlossen. Die Spannung $u_C(t)$ an der Kapazität steht mit einer **beliebig** verlaufenden Speisespannung u(t) allgemein über die Differenzialgleichung *(kommt später)*

$$u(t)=u_C(t)+R\cdot C\cdot\frac{du_C(t)}{dt}$$ in Zusammenhang.

Falls u(t) sinusförmig mit

$$u(t)=\sqrt{2}\cdot U_{eff}\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

verläuft, ist die Spannung am Kondensator im eingeschwungenen Zustand ebenfalls sinusförmig, jedoch mit anderem Effektivwert und einem von Null verschiedenen Phasenwinkel:

$$u_C(t)=\sqrt{2}\cdot U_{Ceff}\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi_C)$$

Da die Differenzialgleichung aus physikalischen Gründen immer erfüllt sein muss, gilt

$$u(t)=\sqrt{2}\cdot U_{eff}\cdot\sin(\omega\cdot t)=\sqrt{2}\cdot U_{Ceff}\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi_C)+\sqrt{2}U_{Ceff}\cdot\omega RC\cdot\cos(\omega\cdot t+\phi_C)$$

oder

$$u(t)=\sqrt{2}\cdot U_{eff}\cdot\sin(\omega\cdot t)=\sqrt{2}\cdot U_{Ceff}\cdot\left[\sin(\omega\cdot t+\phi_C)+\omega\cdot RC\cdot\cos(\omega\cdot t+\phi_C)\right]\quad\text{(I)}$$

Durch trigonometrische Umformungen und Koeffizientenvergleiche erhält man daraus die beiden unbekannten Größen U_{Ceff} und ϕ_C . Bestimmen Sie diese.

Hinweis: Verwenden Sie die allgemeine trigonometrische Umformung

$$\sin(\omega\cdot t+\phi)=\sin(\omega\cdot t)\cdot\cos(\phi)+\cos(\omega\cdot t)\cdot\sin(\phi)\quad\text{(II)}$$

→ Die Gleichung (I) gilt für jeden Zeitpunkt, also auch für t=0:

$$0=\sqrt{2}\cdot U_{Ceff}\cdot\left[\sin(\phi_C)+\omega\cdot RC\cdot\cos(\phi_C)\right]\quad\text{(III)}$$

Sie gilt ebenfalls für $t=-\frac{\phi_C}{\omega}\ \rightarrow\ \omega t=-\phi_C$:

$$\sqrt{2}\cdot U_{eff}\cdot\sin(-\phi_C)=\sqrt{2}\cdot U_{Ceff}\cdot[\sin(0°)+\omega\cdot RC\cdot\cos(0°)]=\sqrt{2}\cdot U_{Ceff}\cdot\omega RC \quad \text{(IV)}$$

Aus (III) und (IV) erhält man

$$\frac{\sin(\phi_C)}{\cos(\phi_C)}=\tan(\phi_C)=-\omega RC \rightarrow \phi_C=-\arctan(\omega RC) \quad \text{(V)}$$

$$U_{Ceff}=U_{eff}\cdot\frac{\sin(-\phi_C)}{\omega RC}=-U_{eff}\cdot\frac{\sin(\phi_C)}{\omega RC} \quad \text{(VI)}$$

Mit der trigonometrische Umformung von (V)

$$\phi_C=-\arctan(x)=-\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=-\arcsin\left(\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\right)$$

ergibt sich aus (VI)

$$U_{Ceff}=\frac{U_{eff}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \quad .$$

Zum Vergleich: Die komplexe Schreibweise liefert über die Spannungsteilerregel

$$\tilde{U}_C=\frac{\frac{1}{i\cdot\omega C}}{R+\frac{1}{i\cdot\omega C}}\cdot\tilde{U}=\frac{1}{1+i\cdot\omega RC}\cdot\tilde{U} \quad .$$

Daraus folgt direkt

$$U_{Ceff}=\frac{U_{eff}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \quad , \quad \phi_C=-\arctan(\omega RC) \quad .$$

Entscheiden Sie selbst, was schneller geht …und bedenken Sie, dass reale Netzwerke wesentlich komplexer aufgebaut sein können ...

Anhang

Ein mit **Scilab** erstelltes Diagramm, welches zwei Wechselspannungen mit unterschiedlichen Amplituden und Phasenwinkel zeigt: