Warum bringt die Soft Decision-Decodierung nach dem ML-Prinzip bessere Ergebnisse als das HD-Verfahren?

Teil 1

zu „Grundkurs Codierung“, 3. Auflage 2006, Vieweg Verlag, ISBN 3-528-25399-1,
Unterkapitel 3.4.5, Seite 64

Der Prozess der Fehlerkorrektur durchläuft gemäß Bild 3.1 auf Seite 50 (GkC = Grundkurs Codierung) beim Sender immer die Schritte

- Bereitstellung der Informationsbits u_i
- Berechnen der Prüfbits y_i
- Senden des modulierten Codewortes vs

und beim Empfänger den Schritt

- Berechnen von Schätzwerten $\hat{u}_i$ für die gesendeten Informationsbits aus den verrauschten Empfangswörtern ws = vs + rs.

Dazu haben Sender und Empfänger den Aufbau der Codewörter und das Berechnungsverfahren für die Prüfbits vereinbart. Der Empfänger nimmt ausserdem an, dass dem Rauschen rs ein bestimmtes statistisches Modell zugrunde liegt, was durch Messungen am Übertragungskanal bestätigt sein sollte. Näherungsweise eignet sich oft ein normalverteiltes, mittelwertfreies Gauß'sches Störsignal mit bekanntem oder auch unbekanntem Effektivwert. In der Literatur wird es häufig als AWGN-Signal (= Additive White Gaussian Noise) bezeichnet. Die Signalverläufe könnten bei einem basisbandmodulierten Sendesignal etwa so aussehen, wie es Bild 3.2 auf Seite 51 (GkC) darstellt.

Für einen Vergleich des SD- mit dem HD-Verfahren schauen wir uns das Beispiel eines (7,4,3)-Hammingcode-Wortes mit dem Info-Wort 0101 an:

Info-Wort: $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)=(0,1,0,1)$

Codewort: $v=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7)=(0,1,0,1,0,1,0)$, siehe auch S. 29 (GkC).

Mit +1/-1 Volt moduliertes Basisband-Sendewort:

$$vs=(vs_1,vs_2,vs_3,vs_4,vs_5,vs_6,vs_7) \quad =(\ +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1)$$

Störsignalwort: $$rs=(rs_1,rs_2,rs_3,rs_4,rs_5,rs_6,rs_7) \quad =(-0.4,\ +1.6,\ +0.7,-0.8,+1.2,\ -0.2,+0.9)$$

Empfangswort: $$ws=(ws_1,ws_2,ws_3,ws_4,ws_5,ws_6,ws_7)=(+0.6,\ +0.6,\ +1.7,-1.8,+2.2,-1.2,\ +1.9)$$

HD-demoduliertes Schätzwort:

$$w_{HD}= \quad =(\ +1,\ +1,\ +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1)$$

Fehlerwort: $$e\ =\ vs-w_{HD} \quad =(\ 0,\ -2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

Es ist also ein Fehler in der zweiten Position entstanden, der über den Decodier-Algorithmus korrigiert werden kann. Bei einem Störsignalwort

$$rs= \quad =(-0.4,\ +1.6,\ +0.7,-0.8,+1.2,\ -0.2,-1.1)\ .$$

wären im Schätzwort 2 Fehlstellen enthalten

$$e\ =\ vs-w_{HD} \quad =(\ 0,\ -2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -2)\ ,$$

die nun nicht mehr korrigierbar sind. Jede Signalstelle steht also für sich allein und trägt die gesamte „Verantwortung“. Es können 3 Fälle auftreten:

- Der Störsignalwert rs_i hat einen Betrag < 1: Das Schätzergebnis ist korrekt.
- Der Störsignalwert rs_i hat einen Betrag > 1 und gleiches Vorzeichen, wie der zugeordnete Sendesignalwert vs_i: Das Schätzergebnis ist korrekt, da sich das Summenvorzeichen von $ws_i = vs_i + rs_i$ nicht ändert.
- Der Störsignalwert rs_i hat einen Betrag > 1 und entgegengesetztes Vorzeichen zum zugeordneten Sendesignalwert vs_i: Das Schätzergebnis ist falsch, da sich das Summenvorzeichen umkehrt, ein Fehler entsteht.

Wie sieht es beim Soft Decision-Verfahren nach dem Maximum Likelihood-Prinzip aus? Hier wird das Empfangswort mit allen 16 möglichen Sendewörtern vs* verglichen, indem man für jedes Sendewort die Summe q der quadratischen Differenzen zwischen diesem und dem Empfangswort bildet:

$$q = (ws_1 - vs_1^*)^2 + (ws_2 - vs_2^*)^2 + \ldots\ldots + (ws_7 - vs_7^*)^2 \quad , \qquad vs^* \in (vs^1, vs^2, \ldots. vs^{16})$$

Dasjenige Sendewort vs^{opt}, welches die kleinste Summe ergibt, wird als jenes mit der größten Wahrscheinlichkeit (= Maximum Likelihood) angenommen und liefert das Schätzwort. Welche Fälle können auftreten?

- Wenn das Vergleichswort v* mit dem Sendewortanteil vs im Empfangswort ws = vs + rs übereinstimmt, wird dieser Anteil eliminiert und die Summe q besteht nur aus den quadratischen Beiträgen der Störsignalwortes:

$$\begin{aligned} q &= (ws_1 - vs_1)^2 + (ws_2 - vs_2)^2 + \ldots\ldots + (ws_7 - vs_7)^2 \\ &= (vs_1 + rs_1 - vs_1)^2 + (vs_2 + rs_2 - vs_2)^2 + \ldots\ldots + (vs_7 + rs_7 - vs_7)^2 \\ &= rs_1^2 + rs_2^2 + \ldots. + rs_7^2 \end{aligned}$$

- Wenn das Vergleichswort v* nicht mit dem Sendewortanteil vs im Empfangswort ws übereinstimmt (es ist dann eines von den restlichen 15), kommen in der Summe noch diejenigen Beiträge hinzu, in denen sich die beiden Sendesignalwörter unterscheiden. Das sind genau die Stellen, die zum Hammingabstand beitragen. Beim hier betrachteten (7,4,3)-Hammingcode hat jedes Codewort zu jedem anderen genau 7 Mal den Abstand 3 (den Mindestabstand des Codes), 7 mal den Abstand 4 und 1 Mal den Abstand 7. Man kann das anhand der Tabelle 3-2 auf Seite 59 (GkC)nachprüfen, was etwas mühsam ist. Etwas übersichtlicher mag die folgende Tabelle sein, welche die Abstandspositionen der 16 Codewörter zum hier als Beispiel gewählten Sendewort vs zeigt (vs erscheint auch in Zeile 6, Spalte 4). Die 15 Tabellen für die weiteren 15 Sendewörter sind bis auf eine andere Reihenfolge gleich.

Nr.	Unterschieds-Positionen	Differenz zu Sendewort vs =							alle möglichen Sendewörter vs* für den Vergleich mit vs						
		1	−1	1	−1	1	−1	1							
1	246	0	−2	0	−2	0	−2	0	1	1	1	1	1	1	1
2	257	0	−2	0	0	2	0	2	1	1	1	−1	−1	−1	−1
3	2347	0	−2	2	−2	0	0	2	1	1	−1	1	1	−1	−1
4	2356	0	−2	2	0	2	−2	0	1	1	−1	−1	−1	1	1
5	4567	0	0	0	−2	2	−2	2	1	−1	1	1	−1	1	−1
6		0	0	0	0	0	0	0	1	−1	1	−1	1	−1	1
7	345	0	0	2	−2	2	0	0	1	−1	−1	1	−1	−1	1
8	367	0	0	2	0	0	−2	2	1	−1	−1	−1	1	1	−1
9	1245	2	−2	0	−2	2	0	0	−1	1	1	1	−1	−1	1
10	1267	2	−2	0	0	0	−2	2	−1	1	1	−1	1	1	−1
11	1234567	2	−2	2	−2	2	−2	2	−1	1	−1	1	−1	1	−1
12	123	2	−2	2	0	0	0	0	−1	1	−1	−1	1	−1	1
13	147	2	0	0	−2	0	0	2	−1	−1	1	1	1	−1	−1
14	156	2	0	0	0	2	−2	0	−1	−1	1	−1	−1	1	1
15	1346	2	0	2	−2	0	−2	0	−1	−1	−1	1	1	1	1
16	1357	2	0	2	0	2	0	2	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

Bleiben wir zunächst bei denjenigen Paaren mit dem Abstand 3. In der Summe der Differenzquadrate gibt es 3 Summanden, bei denen sich die Beiträge des Sendewortes nicht aufheben sondern im Gegenteil sogar verstärken. Nehmen wir als erstes Vergleichswort das Nullwort (Zeile 1) an. Es ist

$$vs^1 = (+1,\ +1,\ +1, +1,\ +1,\ +1,\ +1)$$

und unterscheidet sich damit in den Positionen 2, 4 und 6 vom gesendeten Wort. Die Summe q' hat die Form

$$\begin{aligned}
q' &= (ws_1 - vs_1^1)^2 + (ws_2 - vs_2^1)^2 + ... + (ws_7 - vs_7^1)^2 \\
&= (+1 + rs_1 - 1)^2 + (-1 + rs_2 - 1)^2 + (+1 + rs_3 - 1)^2 + (-1 + rs_4 - 1)^2 + (+1 + rs_5 - 1)^2 + (-1 + rs_6 - 1)^2 + (+1 + rs_7 - 1)^2 \\
&= rs_1^2 + (rs_2^2 - 4rs_2 + 4) + rs_3^2 + (rs_4^2 - 4rs_4 + 4) + rs_5^2 + (rs_6^2 - 4rs_6 + 4) + rs_7^2 \\
&= rs_1^2 + rs_2^2 + rs_3^2 + rs_4^2 + rs_5^2 + rs_6^2 + rs_7^2 + 4(3 - rs_2 - rs_4 - rs_6) \\
&= q + 4(3 - rs_2 - rs_4 - rs_6)
\end{aligned}$$

- Sie besteht aus der Summe q der Differenzquadrate zwischen Empfangswort und Sendewort sowie einem Beitrag der Störsignalanteile aus denjenigen Stellen, wo sich Sendewort und Vergleichswort unterscheiden. Genau hier liegt die „Gefahrenstelle“: Solange die Summe der 3 Störsignalanteile kleiner als 3 bleibt, ist der Klammerausdruck größer als 0 und q bleibt kleiner als q'. Wenn aber diese Summe zufällig größer als 3 wird, ist q' kleiner als q und nimmt den Platz des „Siegers“ ein. Dem Schätzwert v^{opt} für das gesendete Wort wird dann ein falsches Wort zugewiesen.

  Damit zeichnet sich bereits der wesentliche Unterschied zum HD-Verfahren ab: Bei SD können die - in diesem Beispiel - drei Rauschsignalwerte für sich beliebig groß werden, wenn nur ihre Summe < +3 bleibt. Ein oder sogar zwei Ausreisser bewirken keine fehlerhafte Schätzung, solange die restlichen Partner dies auffangen. Die Teamleistung zählt also, die Starken können die Schwachen mitziehen, während bei HD jeder für sich kämpft. Allerdings gibt es auch einen schwerwiegenden Nachteil: Das Austesten jedes möglichen Codewortes nimmt bei längeren Codes nicht mehr handhabbare Aufwände an. Hier muss man zu Näherungen greifen, die an dieser Stelle aber noch nicht behandelt werden, da es zunächst ums Prinzip geht.

- Ganz ähnliche Verhältnisse wie für die 7 Wörter mit dem Abstand 3 (Zeilen 1, 2, 7, 8, 12, 13, 14) liegen für die 7 Wörter mit dem Abstand 4 (Zeilen 3, 4, 5, 9, 10, 15, 16) und dem einen Wort mit dem Abstand 7 (Zeile 11) vor. Hier dürfen die Summen den Wert +4 bzw. + 7 nicht übersteigen.

- Bei der Häufigkeitsberechnung ist also zu ermitteln, wie oft der Fall auftritt, dass wenigstens eines der 15 Vergleichswörter einen falschen Schätzwert bewirkt. Diese Berechnung ist aufwändiger als für das HD-Verfahren. Wir versuchen später in Teil 2 ein brauchbares Vorgehen zu finden, machen uns aber bereits hier mit einigen elementaren Gesichtspunkten vertraut. Dabei wird auch die Antwort auf die Frage eine Rolle spielen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass drei normalverteilte Störsignalwerte mit gleicher Streuung σ den Summenwert > +3 annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigt, dass hierfür das Integral von +3 bis ∞ über die Verteilungsdichte der Summe gebildet werden muss. Allgemein hat die Summe von n statistisch unabhängigen, mittelwertfreien, normalverteilten Zufallsvariablen $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, ..., $r^{(n)}$ aus n verschiedenen Zufallsmengen mit den Streuungen σ_1, σ_2, ..., σ_n, die Verteilungsdichte

$$pn(r_{summe}) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ ... \ + \sigma_n^2)}} \cdot e^{-\frac{r_{summe}^2}{2\cdot(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ ...\ +\sigma_n^2)}}$$

Eine genaue Herleitung findet man z. B. bei *W. Leonhard, „Statistische Analyse linearer Regelsysteme“, Teubner Verlag*.

In unserem Fall ist n = 3 und die Zufallsvariablen stammen alle aus der gleichen Menge mit der Streuung σ. Daher hat die Verteilungsdichte die Form

$$p3(r_{summe}) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot(3\cdot\sigma^2)}} \cdot e^{-\frac{r_{summe}^2}{2\cdot(3\cdot\sigma^2)}} \quad ,$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe aus 3 zufällig gewählten Werten größer als 3 beträgt, ergibt sich aus

$$P3(r_{summe}>+3)=\int_{+3}^{+\infty} p3(x)\,dx$$

(der Ausdruck ist im Übrigen dem Gauß'schen Fehlerintegral eng verwandt, wieso?). Für σ = 1 erhält man P = 0.0416, was durch eine rechnerische Simulation mit 2.000.000 Zufalls-Sendewörtern durch das Ergebnis 0.042 bestätigt wird. Da die entnommenen Stichproben von 3-er Kombinationen beliebig gewählt werden können, gilt dieses Ergebnis für alle „7 über 3“ =35 Möglichkeiten in einem Wort der Länge 7 und damit insbesondere auch für die 7 Wörter mit den oben angegebenen festen Unterschiedspositionen.

- Da die Unterschiedspositionen fest liegen und jeweils zwei Wörter eine gemeinsame Unterschiedsposition aufweisen, sind sie nicht statistisch unabhängig, weshalb die Häufigkeiten der Einzelwörter nicht einfach nur 7-mal addiert werden dürfen. Die notwendigen Korrekturen behandeln wir später im Teil 2, für die Bestimmung einer ***oberen Schranke*** ist diese Addition aber geeignet.
- Die Vorzeichen des Beitrags der rs_2, rs_4 und rs_6 in q' treten im Rahmen des Vergleichs mit den restlichen 14 möglichen Sendewörtern in jeder der $2^3 = 8$ Kombinationen auf. Wegen der Symmetrie der Normalverteilung für das Störsignals hat dies keinen Einfluss auf die Schätzfehlerrate, da negative und positive Werte gleichen Betrags gleich häufig erscheinen.
- Die bisherigen Überlegungen gelten für alle der 7 möglichen Vergleichswörter, die zum Sendewort einen Abstand von 3 haben. Ganz ähnlich ist es auch für die 7 möglichen Vergleichswörter mit dem Abstand 4 und für dasjenige mit dem Abstand 7. Die Verteilungsdichten für die Summen von 4 bzw. 7 Variablen sind dann

$$p4(r_{summe})=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot(4\cdot\sigma^2)}}\cdot e^{-\frac{r_{summe}^2}{2\cdot(4\cdot\sigma^2)}} \quad \text{bzw.} \quad p7(r_{summe})=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot(7\cdot\sigma^2)}}\cdot e^{-\frac{r_{summe}^2}{2\cdot(7\cdot\sigma^2)}}$$

und die Wahrscheinlichkeiten

$$P4(r_{summe}>+4)=\int_{+4}^{+\infty} p4(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad P7(r_{summe}>+7)=\int_{+7}^{+\infty} p7(x)\,dx \quad .$$

- Da pro Vergleichsvorgang die Wörter mit Abstand 3 und die mit Abstand 4 je 7 Mal auftreten („7 über 4“ ist auch 35), wächst in diesen Fällen – abgesehen von den erwähnten Korrekturen – die Wahrscheinlichkeit ebenfalls um den Faktor 7, das eine Paar mit Abstand 7 geht mit einfacher Wahrscheinlichkeit ein. Die Wortfehlerwahrscheinlichkeit wird also vermutlich „irgendwie“ mit dem Ausdruck

$$P_{WortfehlerSD} \;\rightarrow\; 7\cdot P3(r_{Summe}>+3) \;+\; 7\cdot P4(r_{Summe}>+4) \;+\; 1\cdot P7(r_{Summe}>+7)$$

zusammenhängen. Wegen statistischer Abhängigkeiten zwischen den Unterschiedspositionen einerseits und nichtleeren Schnittmengen zwischen den Summen für falsche Schätzwerte bei den Wörtern mit Abstand 3, 4 und 7 andererseits liefert die obige Summe ein zu großes Ergebnis, welches noch korrigiert werden muss.

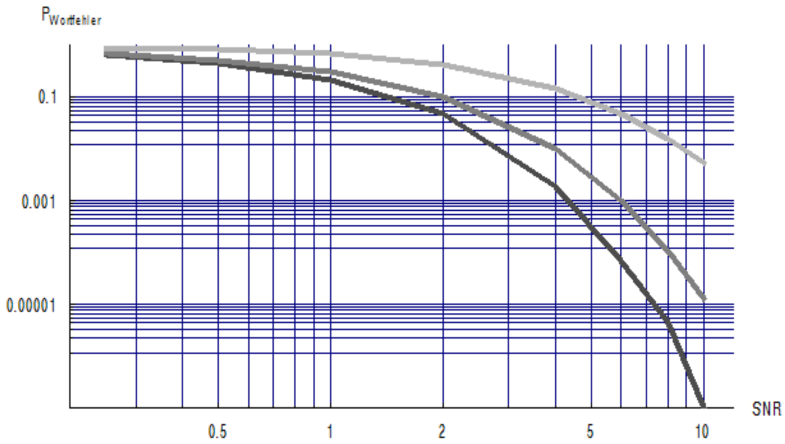
- Einige durch Simulation gewonnene experimentelle Ergebnisse zeigt das folgende Diagramm, in welchem die Verläufe der Wortfehler (= Anteil der fehlerhaften Wörter bezogen auf alle gesendeten Wörter) für Störabstände zwischen SNR = 0.25 und 10 dargestellt sind. Die obere hellgraue Kurve gibt die Wortfehler ohne Korrektur wieder, die mittlere diejenigen nach HD-Korrektur und die untere dunkelgraue schliesslich die über das SD-Verfahren erzielbare. Um die vor allem interessierenden kleinen Wortfehlerraten noch ausreichend beobachten zu können, wurde ein Koordinatensystem mit logarithmischen Achsen gewählt, wie es bei solchen Verhältnissen nützlich ist. Folgende Informationen lassen sich aus diesem Beispiel entnehmen:

  - ☑ Für kleine (= schlechte) Störabstände etwa unter 0.5 nähern sich die Wortfehler bei allen 3 Verfahren dem Wert 1, praktisch jedes Empfangswort wird hier zu einem falschen Schätzwort verarbeitet.
  - ☑ Für große (= gute) Störabstände ab etwa 10 ist bei HD-Korrektur eine deutliche Verbesserung und bei SD eine nochmals weitere erreicht worden.
  - ☑ Bei SNR = 10 zeigt HD eine Wortfehlerrate von $1.3\cdot10^{-5}$, SD eine solche von $1.0\cdot10^{-7}$

☑ SD weist die HD-Wortfehlerrate $1.3\cdot10^{-5}$ für SNR = 10 bereits bei dem schlechteren Störabstand von ca. SNR = 7.0 auf. Das entspricht einem Gewinn CG („Coding Gain“) von 10/7 = 1.43 oder 1.55 dB. Die behauptete Größenordnung zwischen 1.2 und 2.0 (= 0.8 bis 3.0 dB) wird in diesem Beispiel also bestätigt (was aber noch nicht auf allgemeine Gültigkeit schließen lässt!)

☑ Man kann mit dem (7,4,3)-Hammingcode über das SD-Verfahren im Vergleich zu HD also entweder auf dem gleichen Kanal eine Absenkung der Wortfehler um den Faktor $1.3\cdot10^{+2}$ erreichen oder einen um den Faktor 1.43 schlechteren Kanal benutzen.

☑ Die letzte Aussage im vorangegangenen Punkt heisst alternativ, dass bei Verwendung desselben Kanals und gleichem Korrekturergebnis wie für HD die Sendeleistung um den Faktor 1.43 gesenkt werden könnte.



Das dargestellte Ergebnis lässt sich auch rechnerisch ermitteln. Die genaue Bestimmung im allgemeine Fall ist allerdings aufwändig und wird zu einem späteren Zeitpunkt im Teil 2 versucht. Für große Störabstände (etwas genauer ausgedrückt für Störabstände, die bereits ohne Korrektur Wortfehlerraten kleiner als etwa 10^{-2} aufweisen) können brauchbare Näherungen verwendet werden, die sich darauf gründen, dass wegen des Verlaufs der Verteilungsdichte die starken Rauschsignale gegenüber den schwächeren überproportional absinken - und das um so mehr, je kleiner die Streuung bzw. je größer der Störabstand des Kanals ist. Die folgende Tabelle gibt für einige Störabstände des Kanals die Verhältnisse für gemessene und berechnete Abläufe an:

SNR	P_{oK} mess	P_{HD} mess	P_{SD} mess	Int3	Int4	Int7	Summe Int'	7 x Int3
0.25	0.924	0.688	0.6459	0.193238	0.158655	0.0928598	2.55611	1.35267
0.5	0.853	0.52	0.458	0.110336	0.0786496	0.0306844	1.35358	0.77235
1.	0.702	0.308	0.2207	0.0416323	0.0227501	0.00407549	0.454752	0.291426
2.	0.436	0.099	0.047	0.00715294	0.00233887	0.0000914053	0.0665341	0.0500706
4.	0.149	0.010075	0.00189	0.000266003	0.0000316712	6.06577×10^{-8}	0.00208378	0.00186202
6.	0.049	0.001	0.000072	0.0000110452	4.81679×10^{-7}	4.56367×10^{-11}	0.0000806885	0.0000773167
8.	0.0162	0.0001067	4.5×10^{-6}	4.81679×10^{-7}	7.70863×10^{-9}	3.62355×10^{-14}	3.42571×10^{-6}	3.37175×10^{-6}
10.	0.005546	0.000013	$1.\times10^{-7}$	2.16023×10^{-8}	1.26981×10^{-10}	2.96522×10^{-17}	1.52105×10^{-7}	1.51216×10^{-7}

Es bedeuten:

- SNR: Störabstand
- P_{oK}: gemessene Wortfehlerrate ohne Korrektur für ein 7 Bit langes Codewort
- P_{HD}: gemessene Wortfehlerrate mit Korrektur nach dem HD-Verfahren

- P_{SD}: gemessene Wortfehlerrate mit Korrektur nach dem SD-Verfahren (ML)
- Int3, Int4, Int7: berechnete Fehlerintegrale, s. o.
- Summe: 7·Int3 + 7·Int4 + Int7 als Näherung für P_{SD}
- 7 x Int3: nochmalige Näherung 7·Int3 für „Summe“

Man sieht, dass (wenigstens in diesem Beispiel) mit größer werdendem Störabstand der durch 7 x Int3 gegebene Wert eine immer bessere Näherung an die gemessene Wortfehlerrate nach dem SD-Verfahren liefert (gelb hinterlegt). Daher erscheint es gerechtfertigt, hieraus eine Näherung für den rechnerischen Codierungsgewinn CG (Coding Gain) abzuleiten. Hierzu benötigen wir zunächst noch eine Funktion, mit der sich die Wortfehlerrate nach HD bestimmen lässt. Im Unterkapitel 3.5.2, S. 70 ff (GkC), ist der Weg beschrieben. Man benötigt die Bitfehlerrate P_{errBit} des Kanals

$$P_{errBit} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{+\infty} p1(r)\cdot dr = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{r^2}{2\cdot\sigma^2}} dr$$

und kann daraus die Wortfehlerrate

$$P_{WortfehlerHD} = 1 - [(1-P_{errBit})^7 + 7\cdot(1-P_{errBit})^6\cdot P_{errBit}]$$

ermitteln. Sie enthält den Anteil der ohne Korrektur fehlerfreien Wörter und denjenigen, bei welchen sich nach HD-Demodulation ein 1 Bit-Fehler ergab, da dieser ja korrigiert werden kann. Die folgende Tabelle zeigt, dass diese Näherung sehr gute Ergebnisse bringt, siehe Spalten 2 und 4, blau hinterlegt (es ist deshalb eine Näherung, weil sie nicht berücksichtigt, dass durch das Korrekturverfahren in manchen Fällen durch unvermeidliche Falschinterpretation zusätzliche Fehler erzeugt werden, warum?):

SNR	P_{HD} mess	P_{SD} mess	P_{HD} rech	7 x Int3	$P_{HD} : P_{SD}$ mess	$P_{HD} : P_{SD}$ rech	CG rech	CG[dB] rech
0.25	0.688	0.6459	0.688367	1.35267	1.06518	0.508896	0.449941	–3.46844
0.5	0.52	0.458	0.529173	0.77235	1.13537	0.685147	0.728092	–1.37814
1.	0.308	0.2207	0.307677	0.291426	1.39556	1.05577	1.03012	0.12889
2.	0.099	0.047	0.0996185	0.0500706	2.10638	1.98956	1.25004	0.969247
4.	0.010075	0.00189	0.0100723	0.00186202	5.33069	5.40936	1.35084	1.30604
6.	0.001	0.000072	0.00104911	0.0000773167	13.8889	13.569	1.37699	1.38931
8.	0.0001067	4.5×10^{-6}	0.000113984	3.37175×10^{-6}	23.7111	33.8056	1.39035	1.43125
10.	0.000013	$1.\times10^{-7}$	0.0000128315	1.51216×10^{-7}	130.	84.8554	1.39978	1.4606

Die zur vorhergehenden Tabelle neu hinzu gekommenen Spaltenbezeichnungen bedeuten:

- P_{HD} rech: berechnete Wortfehlerrate mit HD
- $P_{HD} : P_{SD}$ mess: Verhältnis der gemessenen Wortfehlerraten
- $P_{HD} : P_{SD}$ rech: Verhältnis der genähert berechneten Wortfehlerraten
- CG rech: genäherter rechnerischer Codierungsgewinn
- CG[dB] rech: genäherter rechnerischer Codierungsgewinn in dB

Die Spalten 6 und 7 zeigen die gemessenen und näherungsweise berechneten Verhältnisse der Wortfehlerraten bei HD zu SD. Bei SNR = 10 liegt dieses Verhältnis immerhin schon bei etwa 100, die SD-Korrektur bringt hier ungefähr 100 Mal weniger fehlerhafte Wörter als SD. Beim gewählten (7,4,3)-Hammingcode beinhaltet jedes Codewort ein halbes Byte. 100 Mal weniger fehlerhafte Wörter bedeuten z. B. etwa nur den hundersten Teil falscher übrig bleibender Textzeichen, eine schon beachtliche Verbesserung.

Um den Codierungsgewinn CG berechnen zu können, muss

- zu einem gegebenen Störabstand SNR die Wortfehlerrate P_{HD} bestimmt,
- dann für diese Wortfehlerrate P_{HD} derjenige Störabstand SNR_{SD} ermittelt werden, der dieselbe Wortfehlerrate $P_{SD} = P_{HD}$ ergibt,
- und schliesslich ist das Verhältnis von SNR und SNR_{SD} zu bilden.

Über diesen Ablauf und unter Zuhilfenahme der Formeln

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{SNR}}$$

$$P_{errBit} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} p1(r) \cdot dr = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{2 \cdot \sigma^2}} dr$$

$$P_{WortfehlerHD} = 1 - [(1 - P_{errBit})^7 + 7 \cdot (1 - P_{errBit})^6 \cdot P_{errBit}]$$

$$\sigma_{SD} = \sqrt{\frac{1}{SNR_{SD}}}$$

$$p3(r_{summe}) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (3 \cdot \sigma_{SD}^{\;2})}} \cdot e^{-\frac{r_{summe}^2}{2 \cdot (3 \cdot \sigma_{SD}^{\;2})}}$$

$$P3(r_{summe} > +3) = \int_{+3}^{+\infty} p3(x)\, dx$$

lassen sich die gewünschten Näherungswerte aus

$$CG = \frac{SNR}{SNR_{SD}[P_{WortfehlerHD}[SNR] == 7 \cdot P3[SNR_{SD}]]}$$

bzw.

$$CG[dB] \;=\; 10 \cdot \log[CG]$$

berechnen. Der Nenner bedeutet, dass derjenige Störabstand SNR_{SD} einzusetzen ist, für den die HD- und SD-Wortfehlerraten gleich sind (doppeltes Gleichheitszeichen). Wegen der Nichtlinearitäten der beteiligten Funktionen muss SNR_{SD} numerisch durch ein Suchverfahren bestimmt werden, im einfachsten Fall durch Probieren, eleganter mit den in Mathematik-Paketen eingebauten Funktionen.

Die genäherten Ergebnisse für CG sind für Störabstände ab etwa SNR = 8 brauchbar, siehe rot hinterlegte Felder. Für Störabstände von 10 bis 20 erhält man

SNR	SNR_{SD} rech	CG rech	CG[dB] rech
10	7.14398	1.39978	1.4606
12	8.52704	1.40729	1.48383
14	9.90412	1.41355	1.50312
16	11.2763	1.4189	1.51953
18	12.6445	1.42354	1.5337
20	14.0095	1.42761	1.54609

Für sehr große Störabstände, die allerdings technisch wenig realistisch wären, konvergiert der CG in diesem Beispiel etwa gegen 1.44. Der aus dem Diagramm entnommene Messwert CG = 10/7 = 1.43 oder 1.55 dB findet sich hier wieder.

Da es sich um ein sehr spezielles Beispiel handelt, ist nicht sicher, ob sich die daraus gewonnenen Ergebnisse verallgemeinern lassen. Um die Unsicherheit darüber zu verringern, betrachten wir noch kurz, wie es beim (15,5,7)-BCH-Code aussieht. Die Generatormatrix besteht aus 5, den 5 Basis-Codewörtern entsprechenden Zeilen, aus denen sich alle 2^5 -5 = 32 -5 = 27 restlichen Codewörter durch Linearkombinationen bilden lassen, siehe auch Unterkapitel 3.7.7, S. 125 ff (GkC):

$$G_{BCH(15,5,7)} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Der Mindestabstand beträgt hier d_{min} = 7, weitere auftretende Abstände sind 8 und 15. Bei der Suche nach dem besten Schätzwort mit Hilfe des SD-Verfahrens sind nun 15 Wörter mit Abstand 7, 15 Wörter mit Abstand 8 und 1 Wort mit Abstand 15 zu testen. Die Auftrittswahrscheinlichkeiten berechnen sich mit den Verteilungsdichtfunktionen

$$p7(r_{summe}) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot(7\cdot\sigma^2)}}\cdot e^{-\frac{r_{summe}^2}{2\cdot(7\cdot\sigma^2)}}$$ usw. über die Integrale

$$P7(r_{summe} > +7) = \int_{+7}^{+\infty} p7(x)\,dx$$ usw. Die obere Schranke für die Wortfehlerrate ist demnach:

$$P_{WortfehlerSD} \;\rightarrow\; 15\cdot P7(r_{Summe} > +7) \;+\; 15\cdot P8(r_{Summe} > +8) \;+\; 1\cdot P15(r_{Summe} > +15)$$

Für große Störabstände wird

$$P_{WortfehlerSD} \;\approx\; 15\cdot P7(r_{Summe} > +7)$$

ausreichen. Eine Simulation für SNR = 2.0 mit 5 Millionen zufälligen Wörtern ergibt:

- PoK: 0.707 gemessene Wortfehlerrate ohne Korrektur
- PSD: 0.00155 gemessene Wortfehlerrate mit SD-Korrektur
- P7: 0.0000914 Fehlerintegral für die 7 Unterschiedspositionen
- P8: 0.0000317 Fehlerintegral für die 8 Unterschiedspositionen
- P15: 0.00000002 Fehlerintegral für die 15 Unterschiedspositionen
- 15·P7: 0.001371 Näherung für die gemessene Wortfehlerrate PSD

Die Näherung ist also bereits bei SNR = 2.0 zufriedenstellend. Für Störabstände zwischen 2 und 10 erhält man

SNR	SNR_{SD} rech	CG rech	CG[dB] rech
2	1.22227	1.63631	2.13864
4	2.41111	1.65899	2.19844
6	3.63979	1.64845	2.17075
8	4.86617	1.64401	2.15903
10	6.08291	1.64395	2.15889

Der Codierungsgewinn liegt bei CG = 1.64 oder 2.16 dB und damit wiederum im vorhergesagten Bereich. Durch die nicht berücksichtigten zusätzlichen Fehler beim berechneten HD-Korrekturergebnis schwanken bei dieser Näherung die letzten Stellen leicht.