Grundkurs Codierung

Lösungsvorschläge zu den Fragen in den Unterkapiteln „Was blieb?“
Stand 08.12.2006

Unterkapitel 3.5.7, Seite 93

Zu Frage 1:

a) Umrechnung von SNR [db] in SNR:

$$\mathrm{SNR} = 10^{\frac{\mathrm{SNR[db]}}{10}} = 10^{-0.4} = 0.3981$$

b) Umrechnung von SNR in Standardabweichung σ (= Streuung) eines normalverteilten, mittelwertfreien Rauschens rs:

$$\mathrm{SNR} = \frac{1}{\sigma^2} \rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{SNR}}} = 1.585$$

c) Berechnung des Gauss'schen Fehlerintegrals errf [σ]:

$$\mathrm{EBR}[\sigma] = \mathrm{errf}[\sigma] = \frac{1}{\sqrt{[2\cdot\pi\cdot\sigma^2]}} \int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{rs^2}{2\cdot\sigma^2}}\, drs = 0.26 \quad .$$

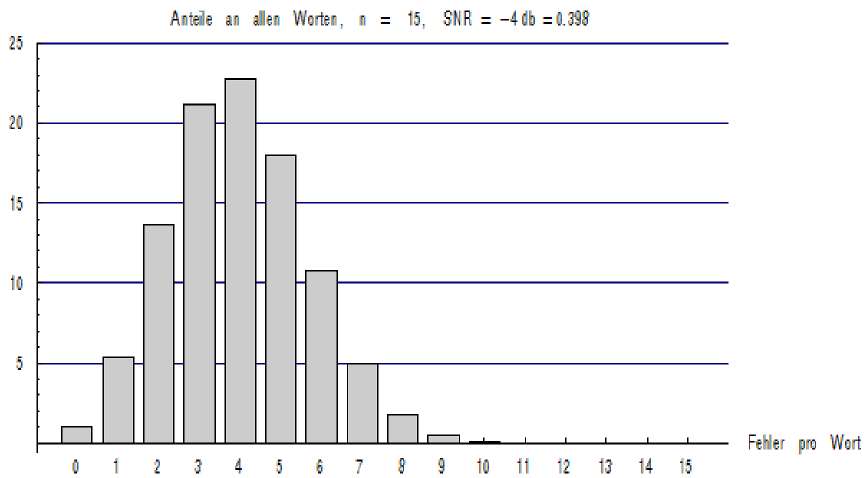
Zu Frage 2:

In Unterkapitel 3.5.2, S. 70 ff., wird gezeigt, dass bei einer Fehlerrate EBR, welche sich aus dem Störabstand SNR über das Gauss'sche Fehlerintegral errf[σ] berechnen lässt (s. Frage 1), sich in einem Wort der Länge n eine Anzahl Fehler i nach

$$\binom{n}{i} \cdot \mathrm{EBR}^i \cdot (1 - \mathrm{EBR})^{n-i}$$

berechnen lässt. Bei SNR = - 4 dB ist EBR = 0.26. Wörter der Länge n = 15 weisen dann bei i Fehlern pro Wort folgende prozentuale Anteile auf:

Fehler i pro Wort	Anzahl Worte in %
0.	1.01
1.	5.42
2.	13.6
3.	21.15
4.	22.76
5.	17.97
6.	10.74
7.	4.95
8.	1.78
9.	0.5
10.	0.11
11.	0.02
12.	0.00
13.	0.
14.	8.83×10^{-6}
15.	2.11×10^{-7}



Hinweis: Mit dem (15,5,7)-BCH-Code werden alle Codewörter mit 1, 2 und 3 Fehlern korrigiert, ihr Anteil erhöht die fehlerfreien Wörter mit i = 0. Da die Korrektur in jedem Fall aber auf ein gültiges Codewort führt und alle Codewörter dieses Codes untereinander nur die Abstände 7, 8 und 15 aufweisen, werden von den Wörtern mit $i > 3$ durch Falschkorrektur die Wortanteile mit i=7, 8 und 15 aufgefüllt, Wörter mit i = 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13 und 14 erscheinen nach der Korrektur nicht mehr. Dieser Effekt sorgt leider auch dafür, dass bei sehr schlechten (=kleinen) Störabständen die Fehlerrate bis auf den Wert 1 steigt und nicht gegen 0.5 geht, wie es theoretisch zu erwarten wäre.

Zu Frage 3:

Zur Beantwortung ist zunächst die Shannongrenze für die Info-Rate R = 0.8 zu bestimmen. Für **normalverteilte** Info- und Störsignale stellt sie gemäß der Formel auf Seite 91 die Lösung der Gleichung

$$SNR'_{Shannongrenze} = \frac{2^{2R} - 1}{R}$$

dar. Für R = 0.8 wird $SNR'_{Shannongrenze} = 3.79 = 5.78$ db. Wegen SNR = SNR' · R hat der reale Störabstand auf einem solchen Kanal den Wert $SNR_{Shannongrenze} = 3.79 \cdot 0.8 = 3.03 = 4.82$ db.

Die Shannongrenze liegt also für **normalverteilte** Info- und Störsignale weit unter dem angegebenen Störabstand SNR = 10. Damit kann der Informationsbit-Strom fehlerfrei – oder präziser beliebig fehlerarm – gemacht werden. Für **bipolare** Sendesignale allerdings zeigt ein Blick auf Bild 3.7, Seite 87, dass die Kanalkapazität bei SNR = 10 bereits erheblich von der für normalverteilte Signale abweicht. Will man eine genaue Aussage zu bipolaren Signalen treffen (das war hier jedoch nicht gefragt), müssen die dafür geltenden Beziehungen auf Seite 89 ausgewertet werden.

Zu Frage 4:

Nein, oder jedenfalls nicht bekannt. Jedoch erreicht ein Encoder/Decoder-Baustein der Firma AHA (siehe www.aha.com) unter Verwendung von Turboproduktcodes, $TPC(128,120)^2$, d. h. $n = 128^2$, $k = 120^2$, $R= 120^2/128^2 = 0.879$, siehe auch Unterkapitel 3.12, bei R = 0.879 und SNR = 7 db eine Restfehlerrate von 10^{-9}. Damit beträgt der Abstand zur Shannongrenze bei R = 0.879 mit $SNR_{Shannongrenze} = 3.85 = 5.85$ db nur noch etwa 1.15 db. **Hinweis:** In den Dokumenten von AHA werden die EBR-Diagramme als Funktion von E_b / N_0 dargestellt. Da $SNR' = 2 E_b / N_0$ ist, gilt SNR' [db] = E_b / N_0 + 3 [db].

Zu Frage 5:

Nein, siehe UK 3.5, S. 91 und Bild 3.6, S. 92

Zu Frage 6:

Nein, aber für sehr kleine Info-Raten konvergieren die Kanalkapazitäten für alle Verteilungen gegen den gleichen Wert SNR' = 1.386, oder $E_b / N_0 = 0.693 = -1.6$ db, siehe S. 91.

Zu Frage 7:

Es besagt, dass für jedes Paar von Störabständen SNR und Bandbreiten B des Kanals Codes existieren, mit denen ein beliebig fehlerarmer Info-Bitstrom C erreicht werden kann.

Zu Frage 8:

Nein, siehe Bild 3.7 auf Seite 87.